Калейдоскопы и системы корней

1.1. Пусть Δ — система корней. Докажите, что группа $W = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$ будет конечна.

1.2 (Изоморфизмы в малых размерностях). Докажите, что:

а) $A_2 \cong I_2(3)$ — группа симметрий правильного треугольника;

б) $A_3 \cong D_3 \cong \mathfrak{S}_4$ — группа симметрий правильного тетраэдра;

в) $B_3 \cong \mathfrak{S}_3 \ltimes (\mathbb{Z}_2)^3$ — группа симметрий куба (она же — октаэдра);

1.3. а) Докажите, что группа симметрий икосаэдра изоморфна $\mathfrak{A}_5 \times \mathbb{Z}_2$

б) Убедитесь, что она является группой отражений. Опишите соответствующую ей систему корней (она называется H_3).

1.4. а) Выпишите системы простых корней для систем корней A_n, B_n, D_n и H_3.

б) Нарисуйте соответствующие этим системам корней графы Кокстера.

1.5 (Калейдоскопы на плоскости и в пространстве). а) Классифицируйте все многоугольники Кокстера (т.е. многоугольники, все углы которых имеют вид π/k). Нарисуйте соответствующее каждому из них замощение плоскости.

б) Ясно, что каждому из многоугольников Кокстера на плоскости соответствует многогранник Кокстера в трёхмерном пространстве: прямоугольная призма над этим многоугольником. А какие ещё бывают многогранники Кокстера в трёхмерном пространстве?