ВВЕДЕНИЕ В ГОМОЛОГИЧЕСКУЮ АЛГЕБРУ

ЗАДАЧИ ПО КУРСУ, ЧАСТЬ III

0. Нулевой объект (эта задача относится, скорее, ко второй лекции).

Покажите, что если в категории $\mathcal{C}$ существуют начальный объект i и конечный объект f, то множество всех морфизмов $f \longrightarrow i$ либо пусто, либо состоит из одного элемента.

1. Нулевой производный функтор.

Правые производные функторы аддитивного функтора $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ между абелевыми категориями $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ определяются правилом $\mathbb{R}^i F(A) = H^i F(J^\bullet)$, где $J^\bullet$ — инъективная резольвента объекта $A \in \mathcal{A}$ (это определение имеет смысл, если в $\mathcal{A}$ достаточно много инъективных объектов). Постройте морфизм функторов $F \longrightarrow \mathbb{R}^0 F$ (т.е. естественные морфизмы $F(A) \longrightarrow \mathbb{R}^0 F(A)$ в категории $\mathcal{B}$ для всех объектов $A \in \mathcal{A}$). Покажите, что (все) этот(и) морфизм(ы) являе(ю)тся изоморфизмом(ами) в том и только том случае, когда функтор F точен слева.

2. Функтор Tor.

Пусть N и M — соответственно правый и левый модули над кольцом R. Тензорное произведение $N \otimes_R M$ определяется как факторгруппа свободной абелевой группы, образующими которой являются формальные символы $n \otimes m$, где $n \in N$ и $m \in M$, по ее подгруппе, порожденной всеми элементами вида $n \otimes (m' + m'') - n \otimes m' - n \otimes m''$, $(n' + n'') \otimes m - n' \otimes m - n'' \otimes m$, и $nr \otimes m - n \otimes rm$, где n', $n'' \in N$, m', $m'' \in M$, и $r \in R$.

а) Покажите, что функтор $\otimes_R$ точен справа (по каждому из своих аргументов);

б) правый R-модуль N называется плоским, если функтор $N \otimes_R -$ точен на категории левых R-модулей, и наоборот. Покажите, что всякий проективный R-модуль является плоским;

в) покажите, что $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Q}$ плоский, но не проективный;

г) определим $\mathrm{Tor}_i^R(N, M)$ как левый производный функтор функтора $\otimes_R$ по первому или, альтернативно, по второму аргументу, т.е. $\mathrm{Tor}_i^R(N, M) = H_i(Q_\bullet \otimes_R M)$ или $H_i(N \otimes_R P_\bullet)$, где $Q_\bullet$ — проективная левая резольвента модуля N в категории правых R-модулей, $P_\bullet$ — проективная левая резольвента модуля M в категории левых R-модулей. Покажите, что эти два определения эквивалентны;

д) покажите, что в определениях из пункта г) достаточно предполагать, что P_i и/или Q_i — плоские модули (а не обязательно проективные);

е) для всех натуральных u и v вычислите $\mathbb{Z}/u \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/v$ и $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/u, \mathbb{Z}/v)$;

ж) для всех натуральных v вычислите $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/v$ и $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/v)$;

з) изоморфны ли два ответа в пункте е) как абелевы группы, и изоморфны ли они как функторы на категории пар конечных циклических/абелевых групп?

3. Диаграммы с аддитивно-мультипликативными соотношениями.

Укажите аддитивную категорию $\mathcal{C}$, такую что категория аддитивных функторов из $\mathcal{C}$ в произвольную абелеву категорию $\mathcal{A}$ эквивалентна категории (неограниченных) комплексов над $\mathcal{A}$.

4. Комодули и бесконечные произведения.

Рассмотрим категорию $\mathcal{A}$ абелевых групп кручения, т.е. таких абелевых групп A, в которых для любого элемента $a \in A$ найдется натуральное число $m \neq 0$, для которого $ma = 0$.

а) Покажите, что любое (в том числе, бесконечное) семейство объектов категории $\mathcal{A}$ имеет копроизведение и произведение;

б) покажите, что счетное произведение в категории $\mathcal{A}$ не является точным функтором, т.е. не сохраняет точность (коротких или длинных) последовательностей.

5. Морфизмы с нулевым конусом.

а) Покажите, что морфизм комплексов (над какой-то аддитивной категорией) является гомотопической эквивалентностью тогда и только тогда, когда его конус стягиваем (т.е. гомотопически эквивалентен нулевому комплексу);

б) покажите, что морфизм комплексов (над какой-то абелевой категорией) является квази-изоморфизмом (т.е. индуцирует изоморфизм когомологий) тогда и только тогда, когда его конус ацикличен (т.е. его когомологии равны нулю).

6. Выделенные треугольники и их морфизмы.

Пусть $\mathcal{H}$ — аддитивная категория с обратимым функтором сдвига $X \longmapsto X[1]$ и классом выделенных треугольников $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$, удовлетворяющим аксиомам TR1–TR3.

а) Покажите, что для любого объекта $A \in \mathcal{H}$ и выделенного треугольника $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$ в $\mathcal{H}$ длинная последовательность

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(A, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(A, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(A, Z) \\ \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(A, X[1]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(A, Y[1]) \longrightarrow \cdots$$

точна;

б) пусть $X' \longrightarrow Y' \longrightarrow Z' \longrightarrow X'[1]$ и $X'' \longrightarrow Y'' \longrightarrow Z'' \longrightarrow X''[1]$ — два выделенных треугольника в $\mathcal{H}$ и тройка морфизмов $u\colon X' \longrightarrow X''$, $v\colon Y' \longrightarrow Y''$, $w\colon Z' \longrightarrow Z''$ в $\mathcal{H}$ образует морфизм треугольников. Покажите, что если u и v — изоморфизмы, то w — тоже изоморфизм.

7. Морфизмы, нулевые в когомологиях: еще одно определение функтора Ext.

Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория. Определим группы $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(A, B)$ как $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A, B[n])$, где объекты A, $B \in \mathcal{A}$ рассматриваются как комплексы

$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$ и $\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow B \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$ с единственными ненулевыми членами в степени 0. Здесь $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ — производная категория абелевой категории $\mathcal{A}$.

а) Покажите, что $\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{A}}(A, B) = 0$ при $n < 0$;

б) покажите, что построенный выше функтор $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$ индуцирует изоморфизмы $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \simeq \operatorname{Ext}^0_{\mathcal{A}}(A, B)$;

в) покажите, что группа $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(A, B)$ может быть ненулевой (для подходящих A, B и $\mathcal{A}$);

г) покажите, что если в категории $\mathcal{A}$ достаточно инъективных объектов, то вышеприведенное определение Ext эквивалентно его определению как производного функтора по второму аргументу $\mathbb{R}^n_B \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$, а если в $\mathcal{A}$ достаточно проективных объектов — то определению как производного функтора по первому аргументу $\mathbb{R}^n_A \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$. (См. в этой связи упр. 10 ниже.)

8. Триангулированные категории не абелевы.

а) Покажите, что морфизм $f\colon X \longrightarrow Y$ в триангулированной категории $\mathcal{H}$ имеет ядро тогда и только тогда, когда он имеет коядро, и тогда и только тогда, когда он изоморфен морфизму вида $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\colon X \oplus Z \longrightarrow Y \oplus Z$;

б) приведите пример гомоморфизма абелевых групп, который, будучи рассмотрен как морфизм в производной категории абелевых групп (см. упр. 7б)), не имеет ни ядра, ни коядра.

9. Ограниченные производные категории.

Определим ограниченные производные категории $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ и $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ абелевой категории $\mathcal{A}$ как локализации (гомотопических) категорий комплексов над $\mathcal{A}$, ограниченных соответственно сверху или снизу, по классу квази-изоморфизмов. Здесь комплекс $C^\bullet$ называется ограниченным сверху, если $C^i = 0$ для $i \gg 0$, и ограниченным снизу, если $C^i = 0$ для $i \ll 0$. Покажите, что естественные функторы $\mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A}) \longleftarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ являются вложениями полных подкатегорий (т.е. вполне строгими, т.е. изоморфизмами на группах морфизмов между любыми объектами, принадлежащими их областям определения).

10. Полуортогональные разложения.

Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ — полные триангулированные подкатегории (т.е. полные подкатегории, замкнутые относительно сдвигов и конусов) в триангулированной категории $\mathcal{H}$, такие что $\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(E, F) = 0$ для всех $E \in \mathcal{E}$ и $F \in \mathcal{F}$.

а) Покажите, что отображения $\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(E, X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}/\mathcal{E}}(E, X)$ и $\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(X, F) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}/\mathcal{F}}(X, F)$ являются изоморфизмами для всех $E \in \mathcal{E}$, $F \in \mathcal{F}$, и $X \in \mathcal{H}$; в частности, сквозные функторы $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}/\mathcal{F}$ и $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}/\mathcal{E}$ являются вполне строгими;

б) если для какого-то объекта $X \in \mathcal{H}$ существует выделенный треугольник $E \longrightarrow X \longrightarrow F \longrightarrow E[1]$ с объектами $E \in \mathcal{E}$ и $F \in \mathcal{F}$, то такой треугольник единственен с точностью до единственного изоморфизма;

в) если такие выделенные треугольники существуют для всех объектов $X \in \mathcal{H}$, то сквозные функторы из пункта а) являются эквивалентностями категорий;

г) пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория с достаточным количеством проективных объектов, $\mathcal{H} = \mathcal{H}ot^-(\mathcal{A})$ — гомотопическая категория ограниченных сверху комплексов над $\mathcal{A}$. Тогда полная подкатегория ограниченных сверху комплексов проективных объектов $\mathcal{E} = \mathcal{H}ot^-(Proj{-}\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$ и полная подкатегория ацикличных ограниченных сверху комплексов $\mathcal{F} = \mathcal{A}cycl^-(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$ удовлетворяют всем вышеперечисленным условиям ("образуют полуортогональное разложение $\mathcal{H}$"). Таким образом, $\mathcal{H}ot^-(Proj{-}\mathcal{A}) \simeq \mathcal{D}^-(\mathcal{A})$;

д) пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория с достаточным количеством инъективных объектов, $\mathcal{H} = \mathcal{H}ot^+(\mathcal{A})$ — гомотопическая категория ограниченных снизу комплексов над $\mathcal{A}$. Тогда полная подкатегория ограниченных снизу комплексов инъективных объектов $\mathcal{F} = \mathcal{H}ot^+(Inj{-}\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$ и полная подкатегория ацикличных ограниченных снизу комплексов $\mathcal{E} = \mathcal{A}cycl^+(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$ образуют полуортогональное разложение $\mathcal{H}$. Таким образом, $\mathcal{H}ot^+(Inj{-}\mathcal{A}) \simeq \mathcal{D}^+(\mathcal{A})$.

Леонид Посицельский, ИППИ РАН и НИУ-ВШЭ
E-mail address: posic@mccme.ru