ВВЕДЕНИЕ В ГОМОЛОГИЧЕСКУЮ АЛГЕБРУ

ЗАДАЧИ ПО КУРСУ, ЧАСТЬ II

1. Единственность морфизма между проективными резольвентами, с точностью до гомотопии.

Пусть $P_\bullet$ — комплекс проективных левых R-модулей с дифференциалом $d\colon P_i \longrightarrow P_{i-1}$, такой что $P_i = 0$ при $i < 0$. Пусть $Q_\bullet$ — комплекс левых R-модулей, такой что $Q_i = 0$ при $i < 0$ и $H_i(Q_\bullet) = 0$ при $i \neq 0$. Покажите, что всякий гомоморфизм комплексов R-модулей $f\colon P_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$, индуцирующий нулевое отображение в гомологиях $H_0(f)\colon H_0(P_\bullet) \longrightarrow H_0(Q_\bullet)$, гомотопен нулю.

2. Стягивающая гомотопия для комплекса Кошуля в характеристике 0.

Пусть V — векторное пространство над полем k. Рассматривается тензорное произведение симметрической и внешней алгебр $S(V) \otimes_k \Lambda(V)$ и на нем два оператора $d = \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$ и $h = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \xi_i$, где x_i — базис в $V \subset S(V)$, а ξ_i — тот же самый базис в $V \subset \Lambda(V)$. Покажите, что для однородного элемента $q \in S(V) \otimes_k \Lambda(V)$ имеет место равенство $dhq + hdq = (\deg q)q$, где $\deg q = \deg_x q + \deg_\xi q$ есть полная степень формы q (по всем переменным x и ξ).

3. Точность комплекса Кошуля в произвольной характеристике.

а) Определите тензорное произведение комплексов k-векторных пространств $C^\bullet \otimes_k D^\bullet$ так, чтобы комплекс Кошуля $S(V) \otimes_k \lambda^\bullet(V)$ конечномерного векторного пространства V (как определялось в лекции) был изоморфен тензорному произведению $\bigotimes_i \bigl(S(kx_i) \otimes_k \lambda^\bullet(k\xi_i)\bigr)$ комплексов Кошуля одномерных прямых слагаемых $kx_i = k\xi_i$ пространства V;

б) покажите, что $H^\bullet(C^\bullet \otimes_k D^\bullet) \simeq H^\bullet(C^\bullet) \otimes H^\bullet(D^\bullet)$;

в) покажите, что $H^\bullet(S(kx_i) \otimes_k \lambda^\bullet(k\xi_i)) = k$ и заключить отсюда вместе с пунктами а)-б), что $H^\bullet(S(V) \otimes_k \lambda^\bullet(V)) = k$;

д) распространите вышеприведенное рассуждение на случай бесконечномерных векторных пространств V.

4. Функтор Hom точен слева по первому аргументу.

Пусть $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ — короткая точная последовательность левых R-модулей, A — левый R-модуль. Покажите, что последовательность абелевых групп $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(Z, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(Y, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(X, A)$ точна.

5. Инъективные модули. (Это упражнение относится к планировавшейся части лекции, которая была опущена из-за нехватки времени.)

Левый R-модуль J называется инъективным, если для любой точной последовательности левых R-модулей $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ последовательность

$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(Z,J) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(Y,J) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(X,J) \longrightarrow 0$ точна. Другими словами, модуль J инъективен, если для любого модуля Y с подмодулем X, любой гомоморфизм модулей $X \longrightarrow J$ можно продолжить до гомоморфизма модулей $Y \longrightarrow J$.

а) Покажите, что абелева группа I инъективна (как $\mathbb{Z}$-модуль) тогда и только тогда, когда она делима, т.е. для любого элемента $i \in I$ и любого целого числа $m \neq 0$ существует (не обязательно единственный!) элемент $i' \in I$, такой что $mi' = i$;

б) пусть I — делимая абелева группа. Покажите, что R-модуль $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,I)$ (со структурой левого R-модуля, индуцированной структурой правого R-модуля на R) инъективен;

в) покажите, что любой левый R-модуль является подмодулем некоторого инъективного левого R-модуля.

$5'$. Еще немного о проективных R-модулях.

Покажите, что левый R-модуль P проективен тогда и только тогда, когда он является прямым слагаемым свободного левого R-модуля, т.е. существует левый R-модуль Q, такой что модуль $P \oplus Q$ свободен.

6. Когомологии групп и алгебр Ли.

а) Пусть G — конечная циклическая группа, M — произвольный G-модуль (т.е. абелева группа, на которой G действует автоморфизмами). Покажите, что когомологии $H^n(G,M) = \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},M)$ периодичны с периодом 2 (при $n \geq 1$);

б) вычислите $H^\bullet(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) = \mathrm{Ext}^\bullet_{U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

7. Копроизведение и произведение аффинных схем.

Вычислите произведение и копроизведение $A \sqcap B$ и $A \sqcup B$ произвольной пары объектов A, B в категории коммутативных, ассоциативных алгебр с единицей над полем k.

8. Образ и кообраз в аддитивной категории.

Пусть $f\colon X \longrightarrow Y$ — морфизм в аддитивной категории $\mathcal{A}$, в которой все морфизмы имеют ядра и коядра. Положим $\mathrm{Coim}\, f = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}\, f \to X)$ и $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}(Y \to \mathrm{Coker}\, f)$. Покажите, что существует единственный морфизм $\mathrm{Coim}\, f \longrightarrow \mathrm{Im}\, f$, такой что исходный морфизм f равен композиции $X \longrightarrow \mathrm{Coim}\, f \longrightarrow \mathrm{Im}\, f \longrightarrow Y$, где $X \longrightarrow \mathrm{Coim}\, f$ и $\mathrm{Im}\, f \longrightarrow Y$ — естественные морфизмы в коядро и из ядра морфизма.

Леонид Посицельский, ИППИ РАН и НИУ-ВШЭ
E-mail address: posic@mccme.ru