ВВЕДЕНИЕ В ГОМОЛОГИЧЕСКУЮ АЛГЕБРУ

ЗАДАЧИ ПО КУРСУ, ЧАСТЬ I

1. Эйлерова характеристика.

а) Пусть $0 \longrightarrow C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^n \longrightarrow 0$ — комплекс конечно-порожденных абелевых групп. Докажите, что $\sum_i (-1)^i \operatorname{rk} C^i = \sum_i (-1)^i \operatorname{rk} H^i(C^\bullet)$. Здесь ранг конечно-порожденной абелевой группы – это число бесконечных циклических слагаемых в ее разложении в прямую сумму циклических групп.

б) Пусть $1 \longrightarrow C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^n \longrightarrow 1$ — конечный комплекс конечных групп (можно и неабелевых). Докажите, что $\prod_i (\#C^i)^{(-1)^i} = \prod_i (\#H^i(C^\bullet))^{(-1)^i}$. Здесь $\#X$ обозначает число элементов множества X.

2. Лемма о змее.

Пусть $0 \longrightarrow A^\bullet \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow 0$ — короткая точная последовательность комплексов абелевых групп. На лекции была изложена конструкция связывающего гомоморфизма $H^i(C^\bullet) \longrightarrow H^{i+1}(A^\bullet)$ и набросок доказательства точности длинной последовательности

$$H^i(A^\bullet) \longrightarrow H^i(B^\bullet) \longrightarrow H^i(C^\bullet) \longrightarrow H^{i+1}(A^\bullet) \longrightarrow H^{i+1}(B^\bullet)$$

в члене $H^{i+1}(A^\bullet)$. Докажите, что связывающий гомоморфизм корректно определен этой конструкцией и длинная последовательность точна во всех членах.

3. 5-лемма.

Пусть $(f^1, \ldots, f^5)$ — гомоморфизм точных последовательностей (набор отображений, образующих коммутативную диаграмму) из точной последовательности $(K^1 \longrightarrow K^2 \longrightarrow K^3 \longrightarrow K^4 \longrightarrow K^5)$ в точную последовательность $(L^1 \longrightarrow L^2 \longrightarrow L^3 \longrightarrow L^4 \longrightarrow L^5)$. Докажите, что если f^1, f^2, f^4, f^5 – изоморфизмы, то f^3 – тоже изоморфизм.

4. Функтор Hom точен слева по второму аргументу.

Если $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ — короткая точная последовательность левых R-модулей, X — левый R-модуль (R — некоммутативное кольцо). Покажите, что последовательность $0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(X, A) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(X, B) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(X, C)$ точна (в первых двух не заведомо нулевых членах).

5. Точность по отношению к коротким последовательностям влечет точность вообще.

Пусть P — проективный левый R-модуль, т.е. функтор $\operatorname{Hom}_R(P, -)$ переводит короткие точные последовательности левых R-модулей в короткие точные последовательности абелевых групп.

а) Покажите, что тот же функтор переводит точные последовательности левых R-модулей $\cdots \longrightarrow E^{-1} \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow E^2 \longrightarrow \cdots$ произвольной длины в точные последовательности абелевых групп.

б) Пусть $\cdots \longrightarrow C^{-1} \longrightarrow C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow C^2 \longrightarrow \cdots$ — комплекс левых R-модулей. Постройте естественный изоморфизм $H^i(\mathrm{Hom}_R(P, C^\bullet)) \simeq \mathrm{Hom}_R(P, H^i(C^\bullet))$.

6. $\mathrm{Hom} = \mathrm{Ext}^0$.

Для любых левых R-модулей X и A постройте естественный изоморфизм $\mathrm{Ext}^0_R(X, A) \simeq \mathrm{Hom}_R(X, A)$.

7. Ext абелевых групп.

а) Покажите, что $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(X, A) = 0$ для всех абелевых групп X, A и $n \geq 2$.

б) Вычислите $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

в) Вычислите $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

Леонид Посицельский, ИППИ РАН и НИУ-ВШЭ
E-mail address: posic@mccme.ru