А. Л. Городенцев[1]

Геометрическое введение в алгебраическую геометрию

Это расширенные записки миникурса лекций, прочитанного на летней школе по алгебраической геометрии, проходившей с 14 по 21 августа 2011 года в Екатеринбурге. При подготовке этих записок использовались выполненные Ромой Травкиным переводы с английского моих лекций, читавшихся в рамках программы «Math. In Moscow» в Независимом московском университете. Рома заодно исправил множество допущенных в английском тексте ошибок, за что я ему глубоко признателен.

Главной целью миникурса была демонстрация некоторых фундаментальных *картинок*, которые полезно держать в голове при изучении современной *алгебраической* геометрии, а также создание словарика, позволяющего переводить понятия из бесконечно богатого (но во многом интуитивного) *мира фигур* на ограниченный (фактически — конечный), но гораздо более приспособленный для «записи – воспроизведения» *язык формул*. Встречающиеся в тексте упражнения существенны для его понимания и как правило используются в дальнейшем.

Читателям, которых алгебраическая геометрия заинтересует всерьёз, мы рекомендуем обратиться к монографиям В. Данилова «Алгебраические многообразия и схемы» и «Когомологии алгебраических многообразий» (опубликованые ВИНИТИ в сер. «Современная математика. Фундаментальные направления.» в томах «Алгебраическая Геометрия – 1, 2»), книге Р. Хартхорна «Алгебраическая геометрия» и книге У. Фултона «Теория пересечений».

Екатеринбург, 17 августа 2011

[1]факультет математики ВШЭ & группа математической физики ИТЭФ (Москва)
e-mail: gorod@itep.ru , gorodentsev@hse.ru
http://wwwth.itep.ru/~gorod

Содержание

§1. Проективное пространство.

Векторное пространство V над произвольным полем $\Bbbk$ является объектом *алгебры*: векторы — это «то, что можно складывать и умножать на числа». Со всяким векторным пространством можно связать два геометрических пространства — *аффинное* и *проективное*, которые состоят из *точек*, что позволяет рисовать в них картинки.

1.1. Аффинное пространство $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$, ассоциированное с n-мерным векторным пространством V, имеет в качестве точек векторы из V. Точка, предствляющая нулевой вектор, называется *начальной* и обозначается через O. Остальные точки удобно представлять себе как концы всевозможных ненулевых «радиус-векторов», отложенных от начала координат. Отметим, что 0-мерное пространство $\mathbb{A}^0 = \mathbb{A}(\overrightarrow{0})$ состоит из одной точки.

1.1.1. Алгебраическое отступление: полиномиальные функции на $\mathbb{A}^n$. Линейные функции[1] $V \longrightarrow \Bbbk$ образуют векторное пространство. Оно называется *сопряжённым* (или *двойственным*) к V и обозначается V^*. С каждым базисом

$$(e_1, e_2, \dots, e_n) \subset V$$

связан *двойственный* базис $(x_1, x_2, \dots, x_n) \subset V^*$, состоящий из координатных линейных функций

$$x_i(e_j) = \begin{cases} 1\,, & \text{при } i = j \\ 0\,, & \text{при } i \neq j\,. \end{cases}$$

Упражнение 1.1. Проверьте, что координатные функции составляют базис в V^* и что отображение

$$V \xrightarrow{v \mapsto \mathrm{ev}_v} V^{**}\,,$$

сопоставляющее каждому вектору $v \in V$ *функцию вычисления*

$$\mathrm{ev}_v : V^* \xrightarrow{\xi \mapsto \xi(v)} \Bbbk\,,$$

является изоморфизмом между V и V^{**}.

Кольцо многочленов от координат $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ называется *координатным кольцом* аффинного пространства $\mathbb{A}(V)$.

Мы будем обозначать через $S^dV^* \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ векторное подпространство всех однородных многочленов степени d. Тогда $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] = \bigoplus\limits_{d \geqslant 0} S^dV^*$, причём $S^rV^* \cdot S^sV^* \subset S^{r+s}V^*$.

Имеется очевидный $\Bbbk$-линейный гомоморфизм колец

$$\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \longrightarrow \{\text{функции } \mathbb{A}(V) \longrightarrow \Bbbk\}\,, \tag{1-1}$$

переводящий многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в функцию, значение которой в точке $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ равно $f(p) = f(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \Bbbk$ (результату подстановки значений координат точки p вместо переменных в многочлен f). Функции $\mathbb{A}(V) \longrightarrow \Bbbk$, лежащие в образе гомоморфизма (1-1), называется *полиномиальными*. Отметим, что хотя конструкция гомоморфизма (1-1) зависит от выбора базиса в V, его образ, а также образы всех подпространств S^dV^* от выбора базиса не зависят.

1.1.2. ЛЕММА. *Гомоморфизм* (1-1) *инъективен*[2], *если и только если основное поле $\Bbbk$ бесконечно.*

Доказательство. Если поле $\Bbbk$ конечно и состоит из q элементов, то пространство $\Bbbk$-значных функций на V также конечно (состоит из q^{q^n} элементов). Поскольку кольцо многочленов всегда бесконечно, у гомоморфизма (1-1) должно быть ненулевое ядро. Обратное утверждение доказывается индукцией по $n = \dim V$.

---

[1] напомним, что функция $V \xrightarrow{\varphi} \Bbbk$ называется *линейной*, если $\varphi(\lambda v + \mu w) = \lambda\varphi(v) + \mu\varphi(w)$ для любых $v, w \in V$ и $\lambda, \mu \in \Bbbk$

[2] т. е. разные многочлены задают разные функции

При $n = 1$ ненулевой многочлен $f(x)$ от одной переменной не может иметь больше, чем $\deg f$ корней. Поэтому, если $f(p) = 0$ для бесконечного множества точек $p \in \mathbb{A}^1 = \Bbbk$, то $f(x) = 0$ в $\Bbbk[x]$. Многочлен от n переменных является многочленом от одной переменной x_n с коэффициентами из $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\nu=0}^{d} \varphi_\nu(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \cdot x_n^{d-\nu} .$$

Вычисляя коэффициенты φ_ν в произвольной точке $(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) \in \Bbbk^{n-1}$, мы получаем многочлен от x_n с постоянными коэффициентами, задающий тождественно нулевую функцию на прямой $x_1 = p_1$, $x_2 = p_2$, $\dots$, $x_{n-1} = p_{n-1}$. По предыдущему, этот многочлен имеет нулевые коэффициенты. Тем самым, все многочлены φ_ν являются тождественно нулевыми функциями на $\mathbb{A}^{n-1}$. По предположению индукции, они являются нулевыми многочленами. □

1.1.3. Аффинное алгебраическое многообразие — это подмножество $X \subset \mathbb{A}(V)$, представляющее собою множество всех решений некоторой системы полиномиальных уравнений (возможно, бесконечной). Одно полиномиальное уравнение $f(x) = 0$ задаёт в аффинном пространстве фигуру, называемую *алгебраической гиперповерхностью*[1] и обозначаемую $V(f)$. Таким образом, аффинное алгебраическое многообразие является пересечением некоторого (возможно, бесконечного[2]) количества гиперповерхностей. Простейшей гиперповерхностью является *гиперплоскость* — фигура, задаваемая (неоднородным) уравнением первой степени.

Упражнение 1.2. Проверьте, что всякая гиперплоскость $U \subset \mathbb{A}(V)$, которая не проходит через начальную точку, задаётся уравнением $\xi(x) = 1$, где линейная форма $\xi \in V^*$ *однозначно* определяется по U, так что возникает естественная биекция между ненулевыми векторами пространства V^* и не проходящими через начало координат гиперплоскостями в $\mathbb{A}(V)$.

1.2. Проективное пространство. Со всяким векторным пространством V размерности $(n+1)$ помимо $(n+1)$-мерного аффинного пространства $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$ связано ещё одно точечное пространство — *n-мерное проективное пространство* $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$. По определению, точками в $\mathbb{P}(V)$ являются одномерные векторные подпространства в V. Иначе можно сказать, что точки $\mathbb{P}(V)$ — это ненулевые векторы из V, рассматриваемые с точностью до пропорциональности, или проходящие через начало координат прямые в $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$. Чтобы видеть такие прямые как «обычные» точки, внутрь $\mathbb{A}(V)$ следует поместить экран (см. рис. 1◇1) — не содержащую начала координат аффинную гиперплоскость U_ξ, задаваемую в $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$ линейным уравнением $\xi(x) = 1$, где $\xi \in V^*$ — какая-нибудь ненулевая линейная форма на V, как в упр. 1.2. Всякий такой экран U_ξ называется *аффинной картой* на $\mathbb{P}(V)$. В карте U_ξ видны все одномерные подпространства, порожденные векторами $v \in V$ с $\xi(v) \neq 0$. Дополнение $U_\xi^{(\infty)} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}_n \setminus U_\xi$ состоит из одномерных подпространств n-мерного векторного подпространства $\operatorname{Ann}(\xi) = \{v \in V \mid \xi(v) = 0\}$ — проходящей через начало координат параллельной копии гиперплоскости U_ξ. Эти одномерные подпространства составляют $(n-1)$-мерное проективное пространство $\mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{P}(\operatorname{Ann}(\xi))$, которое называется *бесконечно удалённой гиперплоскостью* карты U_ξ и обозначается $U_\xi^{(\infty)}$. Точки $U_\xi^{(\infty)}$ можно воспринимать как *направления* в аффинной карте U_ξ. Мы видим,

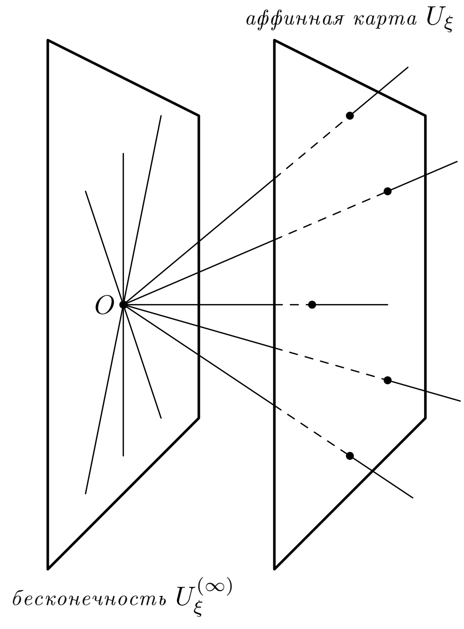


Рис. 1◇1. Проективный мир.

[1] отметим, что когда поле $\Bbbk$ не является алгебраически замкнутым, гиперповерхность $f = 0$ может иметь «совсем мало» точек или вообще оказаться пустой: скажем, уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 = -1$ задают в пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами (x, y, z) одну точку и пустое множество соответственно; однако над алгебраически замкнутым полем, как мы позже увидим, интуитивно ожидаемое соответствие между алгеброй и геометрией всегда имеется

[2] на самом деле, эта оговорка, как мы позже увидим, является лишней

в частности, что n-мерное проективное пространство $\mathbb{P}_n$ разбивается в объединение непересекающихся аффинных пространств всех промежуточных размерностей:

$$\mathbb{P}_n = U_\xi \sqcup U_\xi^{(\infty)} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \mathbb{P}_{n-2} = \cdots = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{A}^0$$

(где $\mathbb{A}^0 = \mathbb{P}_0$ — это одна точка).

Упражнение 1.3. Какое соотношение на q получится, если независимо подсчитать количества точек, из которых состоят левая и правая части этого разбиения над конечным полем из q элементов?

1.3. Глобальные однородные координаты. Зафиксируем в V координаты $x_0, x_1, \ldots, x_n$ относительно какого-нибудь базиса $e_0, e_1, \ldots, e_n$. Два ненулевых вектора

$$v = (x_0, x_1, \ldots, x_n), \quad w = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$$

тогда и только тогда задают одну и ту же точку $p \in \mathbb{P}_n$, когда их координаты пропорциональны. Это равносильно равенству отношений $x_\mu : x_\nu = y_\mu : y_\nu$ для всех $0 \leqslant \mu \neq \nu \leqslant n$ (где мы допускаем и равенства вида $0 : x = 0 : y$ и $x : 0 = y : 0$). Иначе говоря, точкам $p \in \mathbb{P}_n$ корректно соответствуют не сами координаты, а только отношения $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ между ними. Эти отношения называется *однородными координатами* точки p в базисе $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\} \subset V$.

1.4. Локальные аффинные координаты. Рассмотрим на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ аффинную карту

$$U_\xi = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}(V) \mid \xi(x) = 1\},$$

отвечающую какому-нибудь ненулевому ковектору $\xi \in V^*$. Любые n линейных форм

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in V^*,$$

образующие вместе с ξ базис $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ пространства V^*, задают *локальные аффинные координаты*, действующие внутри карты U_ξ. Чтобы вычислить их значения в точке p с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$, следует сначала выбрать в одномерном подпространстве, отвечающем точке p, вектор $v = p/\xi(p) \in U_\xi$, а затем вычислить значения n линейных форм ξ_ν на этом векторе. Отметим, что получающиеся таким образом значения локальных аффинных координат $x_i(p) = \xi_i(v) = \xi_i(p)/\xi(p)$ (где $1 \leqslant i \leqslant n$) *нелинейно* зависят от однородных координат точки p.

1.4.1. Пример: барицентрические координаты на $\mathbb{A}^n$. Если взять в качестве аффинной карты гиперплоскость U_ξ, проходящую через концы базисных векторов $e_0, e_1, \ldots, e_n$ пространства V, то такая карта будет отвечать ковектору $\xi(x) = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$ и состоять из всех векторов $v = \sum \mu_i e_i \in V$ с суммой координат $\sum \mu_i = 1$. Коэффициенты $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ разложения такого вектора по базису e_i будут, таким образом, не чем иным как *барицентрическими координатами* точки $v \in U_\xi = \mathbb{A}^n$ относительно точек $e_0, e_1, \ldots, e_n \in U_\xi = \mathbb{A}^n$.

1.4.2. Пример: проективная прямая $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\Bbbk^2)$ покрывается двумя аффинными картами $U_0 = U_{x_0}$ и $U_1 = U_{x_1}$, представляющими собою аффинные прямые с уравнениями $x_0 = 1$ и $x_1 = 1$ (см. рис. 1◇2). Карта U_0 покрывает все точки $\mathbb{P}_1$ кроме вертикальной координатной оси $(0 : 1)$, которая является единственной бесконечно удалённой точкой для карты U_0. Точка $(x_0 : x_1)$ с $x_0 \neq 0$ видна в карте U_1 как $(1 : \frac{x_1}{x_0})$ и функция $t = x_1|_{U_0} = x_1/x_0$ может использоваться в качестве локальной аффинной координаты в этой карте. Карта U_1 покрывает все точки $(x_0 : x_1) = (\frac{x_0}{x_1} : 1)$ с $x_1 \neq 0$, и функция $s = x_0|_{U_1} = x_0/x_1$ годится в качестве локальной координаты в U_1. Единственной бесконечно удалённой точкой для карты U_1 является горизонтальная координатная ось $(1 : 0)$. Координаты s и t одной и той же точки $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}_1$, видимой сразу в обеих картах, связаны соотношением $s = 1/t$ (очевидным, среди прочего, из подобия прямоугольных треугольников на рис. 1◇2).

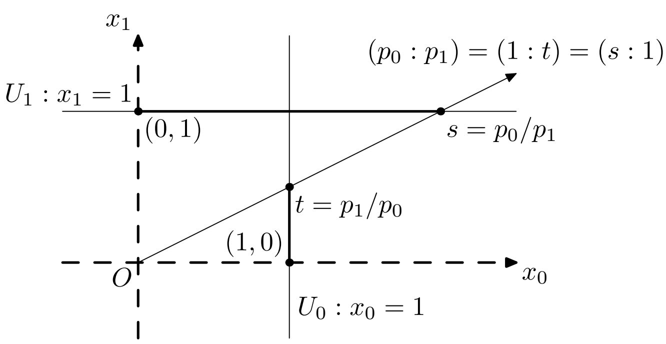


Рис. 1◇2. Стандартные карты на $\mathbb{P}_1$.

Таким образом, $\mathbb{P}_1$ можно воспринимать как результат склейки двух аффинных координатных прямых $\mathbb{A}^1$ (одна —с координатой s, другая — с координатой t) по дополнению до начала координат по следующему правилу: точка с координатой s на одной прямой приклеивается к точке с координатой $t = 1/s$ на другой.

Если основное поле $\Bbbk = \mathbb{R}$, то в результате такой склейки мы получим окружность диаметра 1, картами на которой служат две диаметрально противоположные касательные прямые (см. рис. 1◇3), а отображение окружности на каждую из карт задаётся центральным проектированием из диаметрально противоположного к точке касания «полюса» окружности.

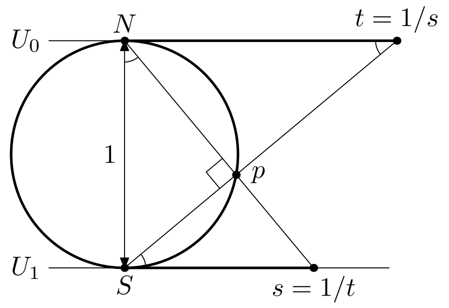


Рис. 1◇3. $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \simeq S^1$.

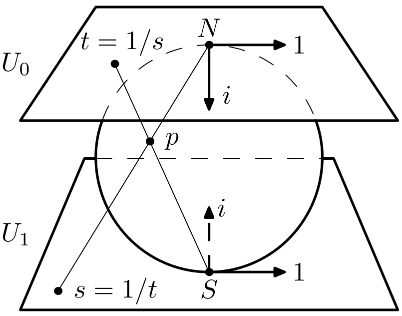


Рис. 1◇4. $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \simeq S^2$.

Точно также при $\Bbbk = \mathbb{C}$ в результате склейки двух экземпляров комплексной аффинной прямой $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$ по правилу $s \leftrightarrow t = 1/s$ мы получим сферу диаметра 1, для которой наши карты являются диаметрально противоположными касательными плоскостями, а сопоставление точке сферы точки на карте задаётся центральной проекцией из диаметрально противоположного к точке касания «полюса» сферы, как на рис. 1◇4: если ориентации касательных плоскостей выбраны согласованным образом, как на рис. 1◇4, комплексные числа s и t будут иметь противоположные аргументы и — согласно рис. 1◇3 — обратные модули.

Отметим, что проективно-геометрический взгляд на окружность как на прямую, к которой «добавили бесконечно удалённую точку» хорошо согласуется с представлениями о бесконечности, принятыми в математическом анализе: если мы занимаемся анализом на аффинной прямой с координатой t, то стремлению t к бесконечности отвечает стремление точки $s = 1/t$ к нулю; при $st \neq 0$ величины t и $s = 1/t$ являются координатами одной и той же точки $p = (s : 1) = (1 : t) \in \mathbb{P}_1$ и эта точка стремится при $t \to \infty$ к точке $(0 : 1) \in \mathbb{P}_1$, которая не видна в карте с координатой t и является началом координат в карте с координатой s (обратите внимание, что эта картина одинаково осмысленна как над $\mathbb{R}$, так и над $\mathbb{C}$).

Упражнение 1.4. Если вы немного знакомы с топологией, убедитесь, что

а) вещественная плоскость $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ гомеоморфна ленте Мёбиуса с заклеенной диском границей[1];

б) $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ гомеоморфна группе $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ вращений трёхмерного евклидова пространства.

1.4.3. Пример: стандартное аффинное покрытие $\mathbb{P}_n$ состоит из $(n+1)$ аффинных карт $U_\nu = U_{x_\nu}$, задаваемых в $\mathbb{A}^{n+1}$ уравнениями $\{x_\nu = 1\}$. Для каждого $\nu = 0, 1, \dots, n$ в качестве стандартных локальных аффинных координат на U_ν берутся n форм

$$t_i^{(\nu)} = x_i|_{U_\nu} = \frac{x_i}{x_\nu} \quad \text{с} \quad 0 \leqslant i \leqslant n\,,\; i \neq \nu\,.$$

Пространство $\mathbb{P}_n$ можно представлять себе как результат склейки $(n+1)$ различных копий $U_0, U_1, \dots, U_n$ аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ по их фактическим пересечениям внутри $\mathbb{P}_n$. В однородных координатах на $\mathbb{P}_n$ пересечение $U_\mu \cap U_\nu$ состоит из всех таких x, у которых обе координаты x_μ и x_ν не обращаются в 0. В локальных аффинных координатах на U_μ и U_ν это подмножество задаётся, соответственно, неравенствами $t_\nu^{(\mu)} \neq 0$ и $t_\mu^{(\nu)} \neq 0$. При этом точка $t^{(\mu)} \in U_\mu$ склеивается с точкой $t^{(\nu)} \in U_\nu$, если и только если $t_\nu^{(\mu)} = 1/t_\mu^{(\nu)}$ и $t_i^{(\mu)} = t_i^{(\nu)}/t_\mu^{(\nu)}$ для $i \neq \mu, \nu$. Правые части этих равенств называются *функциями перехода* от локальных координат $t^{(\nu)}$ к локальным координатам $t^{(\mu)}$.

1.5. Задание фигур полиномиальными уравнениями.

На проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$ никакой отличный от константы многочлен от однородных координат *не задаёт* никакой функции. Тем не менее, для любого *однородного* многочлена f степени d множество его нулей

$$V(f) \overset{\text{def}}{=} \{\, v \in V \mid f(v) = 0 \,\}$$

[1] границей ленты Мёбиуса, так же как и границей круга, является окружность, по которой их и можно приклеить друг к другу

является корректно определенным подмножеством в $\mathbb{P}(V)$, поскольку

$$f(v) = 0 \iff f(\lambda v) = \lambda^d f(v) = 0$$

Иначе говоря, аффинная гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{A}(V)$ представляет собой конус, образованный проходящими через начало координат прямыми, которые являются точками проективного пространства. Множество этих точек $V(f) \subset \mathbb{P}(V)$ называется *проективной алгебраической гиперповерхностью* степени $\deg f$. Пересечения проективных гиперповерхностей, т. е. множества решений систем однородных полиномиальных уравнений, называются *проективными алгебраическими многообразиями*.

Простейшими примерами проективных многообразий являются *проективные подпространства* $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$, ассоциированные с векторными подпространствами $U \subset V$ — они задаются системами однородных линейных уравнений. Например, прямая $(a, b) \subset \mathbb{P}_n$, которая, по определению, представляет собою проективизацию линейной оболочки векторов $a, b \in V$ и состоит из всевозможных точек вида $\lambda a + \mu b$, может быть задана системой линейных уравнений $\xi(x) = 0$, где ξ пробегает подпространство $\mathrm{Ann}\,(a) \cap \mathrm{Ann}\,(b) \subset V^*$ (или любой базис в этом подпространстве). Отношение $(\lambda : \mu)$ коэффициентов из разложения вектора $\lambda a + \mu b \in (a, b)$ можно воспринимать как внутреннюю однородную координату на прямой (a, b).

Упражнение 1.5. Рассмотрим произвольную аффинную карту $U_\xi \subset \mathbb{P}_n$ и произвольное k-мерное проективное подпространство $K \subset \mathbb{P}_n$. Покажите, что либо $K \cap U_\xi = \varnothing$, либо $K \cap U_\xi$ является k-мерным аффинным подпространством в U_ξ .

Упражнение 1.6. Покажите, что для любых двух проективных подпространств $K, L \subset \mathbb{P}_n$ выполняется неравенство $\dim(K \cap L) \geqslant \dim K + \dim L - n$ (в частности, любые две прямые на $\mathbb{P}_2$ пересекаются).

1.5.1. Пример: аффинные коники. Посмотрим как выглядит в различных аффинных картах плоская проективная кривая C степени 2, заданная в однородных координатах на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ уравнением

$$x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 \tag{1-2}$$

В стандартной карте U_{x_0}, где $x_0 = 1$, в локальных координатах $t_1 = x_1|_{U_{x_0}} = x_1/x_0$ и $t_2 = x_2|_{U_{x_0}} = x_2/x_0$ уравнение (1-2) превращается в уравнение гиперболы $t_2^2 - t_1^2 = 1$.

В стандартной карте U_{x_2}, где $x_2 = 1$, с локальными аффинными координатами $t_0 = x_0|_{U_{x_2}} = x_0/x_2$, $t_1 = x_1|_{U_{x_2}} = x_1/x_2$ мы получим уравнение окружности $t_0^2 + t_1^2 = 1$.

В карте $U_{x_0+x_2}$, где $x_0 + x_2 = 1$, в локальных аффинных координатах $t = x_1|_{U_{x_0+x_2}} = x_0/(x_0 + x_2)$, $u = (x_2 - x_0)|_{U_{x_0+x_2}} = (x_2 - x_0)/(x_0 + x_2)$ мы получим уравнение параболы $t^2 = u$ (надо перенести x_1^2 в (1-2) слева направо и поделить обе части на $(x_2 - x_0)^2$).

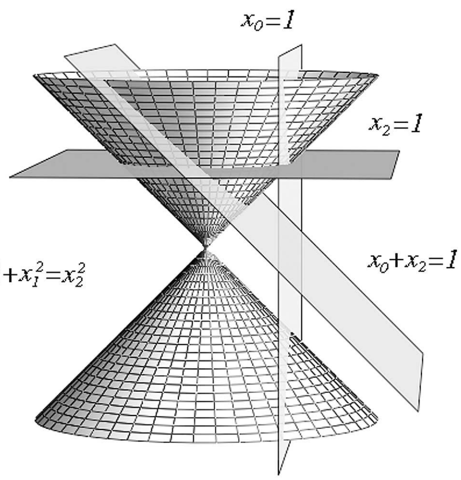


Рис. 1◇5. Конус.

Таким образом, аффинные эллипс, гипербола и парабола суть изображения одной и той же проективной кривой (1-2) в различных картах. Вид C в карте $U \subset \mathbb{P}_2$ определяется тем, как располагается по отношению к C бесконечно удалённая прямая этой карты: эллипс, парабола и гипербола возникают, соответственно, когда эта прямая не пересекается с C, касается C и пересекается с C в двух различных точках (см. рис. 1◇5).

1.5.2. Проективное замыкание аффинной гиперповерхности $S = V(f) \subset \mathbb{A}^n$ это такая проективная гиперповерхность $\overline{S} = V(\overline{f}) \subset \mathbb{P}_n$ той же степени, что и S, пересечение которой со стандартной аффинной картой U_0 совпадает с X. Если (неоднородный) многочлен степени d, задающий S имеет вид

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_0 + f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \cdots + f_d(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

где каждый f_i однороден степени i, то проективное замыкание $\overline{S}$ задаётся однородным многочленом

$$\overline{f}(x_0, x_1, \dots, x_n) = f_0 \cdot x_0^d + f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot x_0^{d-1} + \cdots + f_d(x_1, x_2, \dots, x_n)\,,$$

который получается из f умножением каждого монома на подходящую степень x_0, дополняющую степень всего монома до d, и превращается в f при $x_0 = 1$. Дополнение $\overline{S} \smallsetminus S = \overline{S} \cap U_0^{(\infty)}$ задаётся в однородных координатах $(x_1 : x_2 : \cdots : x_n)$ бесконечно удалённой гиперплоскости $x_0 = 0$ уравнением $f_d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Таким образом, лежащие на бесконечности точки гиперповерхности $\overline{S}$ — это в точности нули старшей однородной компоненты уравнения, задающего S. В аффинной геометрии их обычно называют *асимптотическими направлениями* гиперповерхности S.

Например проективным замыканием аффинной кубической кривой $x_1 = x_2^3$ является проективная кривая $x_0^2 x_1 = x_2^3$, которая имеет на бесконечности ровно одну точку $(0 : 1 : 0)$ и в аффинной карте U_1 выглядит как полукубическая парабола $x_0^2 = x_2^3$ с остриём в этой точке.

1.6. Пространство гиперповерхностей. Напомним, что однородные многочлены фиксированной степени d вместе с нулевым многочленом образуют конечномерное векторное подпространство, которое мы условились обозначать через $S^d V^* \subset \Bbbk[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ (см. (n° 1.1.1). Поскольку пропорциональные уравнения задают одну и ту же гиперповерхность, гиперповерхности степени d являются точками проективного пространства

$$\mathscr{S}_d = \mathbb{P}(S^d V^*) , \tag{1-3}$$

которое мы будем называть *пространством гиперповерхностей* степени d в $\mathbb{P}(V)$.

Упражнение 1.7. Найдите размерность пространства гиперповерхностей d-той степени в $\mathbb{P}_n$.

Поскольку уравнение $f(p) = 0$ при фиксированном $p \in \mathbb{P}(V)$ является *линейным уравнением на* $f \in S^d V^*$, гиперповерхности степени d, проходящие через заданную точку p, образуют проективную гиперплоскость в пространстве всех гиперповерхностей.

Проективные подпространства в пространстве гиперповерхностей называются *линейными системами* гиперповерхностей. По определению, всякая гиперповерхность из линейной системы, порождённой гиперповерхностями $V(f_1)$, $V(f_2)$, ... , $V(f_m)$, задаётся уравнением вида

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_m f_m = 0 ,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \Bbbk$ — некоторые константы. В частности, любая гиперповерхность из такой системы обязательно содержит пересечение $V(f_1) \cap V(f_2) \cap \ldots \cap V(f_m)$.

По старинной традиции, одномерные и двумерные линейные системы также называются *пучками* и *связками* соответственно. Поскольку любая прямая в проективном пространстве имеет непустое пересечение с любой гиперплоскостью, всякий пучок гиперповерхностей (над любым полем!) всегда содержит гиперповерхность, проходящую через любую наперёд заданную точку.

1.6.1. Пример: наборы точек на $\mathbb{P}_1$ и кривая Веронезе. Фиксируем двумерное векторное пространство $U \simeq \Bbbk^2$ с координатами x_0, x_1 и рассмотрим проективную прямую $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$. Всякое конечное множество точек $p_1, p_2, \ldots, p_d \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ (среди которых допускаются и совпадающие) является алгебраической гиперповерхностью, а именно, множеством нулей однородного многочлена d-той степени

$$f(x_0, x_1) = \prod_{\nu=1}^{d} \det(x, p_\nu) = \prod_{\nu=1}^{d} (p_{\nu,1} x_0 - p_{\nu,0} x_1) , \quad \text{где } p_\nu = (p_{\nu,0} : p_{\nu,1}) . \tag{1-4}$$

По аналогии с (неоднородными) многочленами от одной переменной, задающими конфигурации точек на аффинной прямой $\mathbb{A}_1$, мы будем называть точки $p_\nu \in \mathbb{P}_1$ *корнями* однородного многочлена f от переменных x_0, x_1. В этом смысле разложение (1-4) аналогично разложению многочлена от одной переменной на линейные множители, отвечающие корням. В частности, у однородного многочлена степени d от двух переменных имеется не более d различных корней на $\mathbb{P}_1$, а если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то таковых корней, с учётом кратностей[1], будет ровно d. Таким образом, над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ всевозможные d-точечные конфигурации на $\mathbb{P}_1$ взаимно однозначно соответствуют точкам проективного пространства $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$, ассоциированного с $(d+1)$-мерным векторным пространством однородных многочленов степени d от x_0, x_1.

[1] под кратностью корня p понимается максимальная степень линейной формы $\det(t, p)$, на которую делится f

Конфигурации, в которых все d точек слипаются в одну, образуют (над любым полем!) алгебраическую кривую $C_d \subset \mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$, которая называется *кривой Веронезе* степени d или *рациональной нормальной кривой* d-той степени. Эта кривая является образом *отображения Веронезе*

$$\mathbb{P}_1^{\times} = \mathbb{P}\left(U^*\right) \xrightarrow{v_d} \mathbb{P}_d = \mathbb{P}\left(S^d U^*\right) \ , \tag{1-5}$$

переводящего линейную форму $\varphi \in U^*$ (задающую одну точку $p \in \mathbb{P}(U)$) в её d-ю степень $\varphi^d \in S^d(U^*)$ (задающую d-кратную точку p). Если записывать формы $\varphi \in U^*$ и $f \in S^d(U^*)$ в виде

$$\varphi(x) = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 \quad \text{и} \quad f(x) = \sum_{\nu} a_\nu \cdot \binom{d}{\nu} x_0^{d-\nu} x_1^{\nu}$$

и использовать отношения коэффициентов $(\alpha_0 : \alpha_1)$ и $(a_0 : a_1 : \ \dots \ : a_d)$ в качестве однородных координат на $\mathbb{P}_1^{\times} = \mathbb{P}(U^*)$ и на $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$ соответственно, кривая Веронезе будет задаваться параметрическим уравнением

$$(\alpha_0 : \alpha_1) \longmapsto (a_0 : a_1 : \ \dots \ : a_d) = \left(\alpha_0^d : \alpha_0^{d-1}\alpha_1 : \alpha_0^{d-2}\alpha_1^2 : \dots : \alpha_1^d\right) \ . \tag{1-6}$$

Таким образом, C_d состоит из всех точек $(a_0 : a_1 : \ \dots \ : a_d) \in \mathbb{P}_d$, координаты которых составляют геометрическую прогрессию. Это условие равносильно тому, что

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{d-2} & a_{d-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{d-1} & a_d \end{pmatrix} = 1 \ ,$$

и может быть выражено системой однородных уравнений второй степени — обращением в нуль всех 2×2-миноров этой матрицы.

Например, кривая $C_2 \subset \mathbb{P}_2$ образована всеми квадратными трёхчленами $a_0 x_0^2 + 2a_1 x_0 x_1 + a_2 x_1^2$, которые являются полными квадратами. Она задаётся известным из школы уравнением

$$D/4 = -\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = a_1^2 - a_0 a_2 = 0 \tag{1-7}$$

и допускает следующее параметрическое задание:

$$a_0 = \alpha_0^2 \ , \quad a_1 = \alpha_0 \alpha_1 \ , \quad a_2 = \alpha_1^2 \ . \tag{1-8}$$

Пересечение кривой (1-6) с произвольной гиперплоскостью, заданной уравнением $\sum A_\nu a_\nu = 0$, состоит корней $(\alpha_0 : \alpha_1) \in \mathbb{P}_1$ однородного многочлена $\sum A_\nu \cdot \alpha_0^{d-\nu} \alpha_1^{\nu}$ степени d, каковых имеется не более d. Поэтому при $2 \leqslant m \leqslant d$ никакие $m+1$ точек кривой C_d не лежат в одном $(m-1)$-мерном подпространстве. Над алгебраически замкнутым полем пересечение кривой C_d с любой гиперплоскостью состоит в точности из d точек — именно поэтому мы и сказали выше, что *степень* кривой C_d равна d.

1.7. Дополнительные подпространства и проекции. Проективные подпространства $K = \mathbb{P}(U)$ и $L = \mathbb{P}(W)$ пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ называются *дополнительными*, если $K \cap L = \varnothing$ и $\dim K + \dim L = n - 1$. Например, любые две непересекающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$ дополнительны. На языке линейной алгебры дополнительность означает, что соответствующие векторные пространства $U, W \subset V$ трансверсальны: $U \cap V = \{0\}$, и

$$\dim U + \dim W = \dim K + 1 + \dim L + 1 = (n+1) = \dim V \ ,$$

откуда $V = U \oplus W$. В этом случае любой вектор $v \in V$ имеет единственное разложение $v = u + w$ с $u \in U$ и $w \in W$, причём обе компоненты этого разложения отличны от нуля, если v не содержится ни в U, ни в W. Это означает, что для любой точки $p \notin K \sqcup L$ существует единственная прямая $\ell = (q, r)$, проходящая через p и пересекающая каждое из подпространств K, L. В самом деле, в качестве точек q и r, задающих такую прямую, можно взять компоненты u, w разложения вектора v, задающего точку p, и наоборот, если вектор v, задающий точку p оказался в двумерной линейной оболочке ненулевых векторов $u \in U$ и $w \in W$, то одномерные подпространства, натянутые на u и w должны содержать компоненты разложения вектора v в силу единственности его разложения по U и W.

Для любой пары дополнительных подпространств $K, L \subset \mathbb{P}_n$ определено отображение *проектирования на L с центром в K*

$$\pi_L^K : (\mathbb{P}_n \setminus K) \longrightarrow L \ ,$$

тождественно действующее на L и переводящее каждую точку $p \in \mathbb{P}_n \setminus (K \sqcup L)$ в точку пересечения с L единственной прямой,, проходящей через p и пересекающей и K и L. В согласованных с разложением $V = U \oplus W$ однородных координатах $(x_0 : x_1 : \ \dots : x_n)$ таких, что $(x_0 : x_1 : \ \dots : x_m)$ являются координатами в K, а $(x_{m+1} : x_{m+2} : \ \dots : x_n)$ — в L, проекция π_L^K просто удаляет первые $(m+1)$ координат x_ν с $0 \leqslant \nu \leqslant m$.

1.7.1. Пример: проектирование коники на прямую. Рассмотрим проекцию $\pi_L^p : C \longrightarrow L$ коники C, заданной уравнением $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$ из примера (n° 1.5.1), на прямую L, заданную уравнением $x_0 = 0$, из точки $p = (1:0:1) \in C$.

В стандартной аффинной карте U_2, где $x_2 = 1$, она выглядит как на рис. 1◇6. Такая проекция устанавливает *бирациональную биекцию* между L и C: каждая проходящая через p прямая $\ell_t = (pt)$, за исключением касательной[1], пересекает C ещё ровно в одной точке $q = q(t)$, отличной от p, и однородные координаты $q = (q_0 : q_1 : q_2)$ и $t = (0 : t_1 : t_2)$ этих точек суть *рациональные* алгебраические функции друг друга:

$$\begin{aligned} (t_1 : t_2) &= (\, q_1 : (q_2 - q_0)\,) \\ (q_0 : q_1 : q_2) &= (\,(t_1^2 - t_2^2) : 2\,t_1 t_2 : (t_1^2 + t_2^2)\,) \end{aligned} \tag{1-9}$$

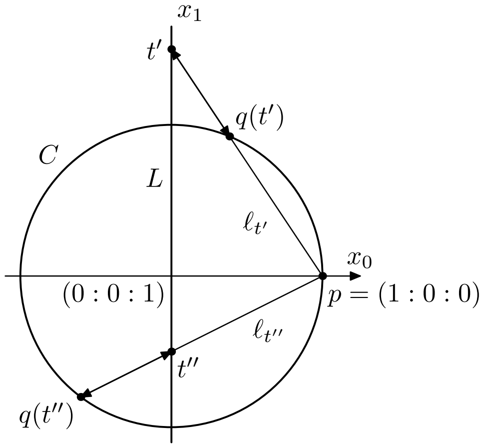


Рис. 1◇6. Проектирование коники.

Упражнение 1.8. Проверьте эти формулы и обратите внимание, что вторая из них, когда $(t_1 : t_2)$ пробегает $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, дает полный список пифагоровых троек[2] $(q_0 : q_1 : q_2)$.

Отметим, что коника C переводится в конику Веронезе $a_1^2 = a_0 a_2$ из (1-7) обратимой линейной заменой координат

$$\begin{cases} a_0 = x_2 + x_0 \\ a_1 = x_1 \\ a_2 = x_2 - x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = (a_0 - a_2)/2 \\ x_1 = a_1 \\ x_0 = (a_0 + a_2)/2 \end{cases}$$

и параметризация (1-8) кривой Веронезе при этой замене коодинат превращается в точности в параметризацию (1-9).

1.8. Линейные проективные изоморфизмы. Всякий линейный изоморфизм векторных пространств $F : U \xrightarrow{\sim} W$ корректно определяет биекцию $\overline{F} : \mathbb{P}(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(W)$, которая называется *проективным линейным преобразованием* или *проективным изоморфизмом*.

Упражнение 1.9. Рассмотрим на $\mathbb{P}_2$ две прямые ℓ_1, ℓ_2 и точку $p \notin \ell_1 \cup \ell_2$. Убедитесь, что проекция из p задаёт проективный изоморфизм $\gamma_p : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$.

1.8.1. ЛЕММА. *Для любых двух упорядоченных наборов из $(n+2)$ точек*

$$\{p_0, p_1, \dots, p_{n+1}\} \in \mathbb{P}(U)\,, \quad \{q_0, q_1, \dots, q_{n+1}\} \in \mathbb{P}(W)\,,$$

в каждом из которых которых никакие $(n+1)$ точек не лежат в одной гиперплоскости, существует единственный с точностью до пропорциональности линейный изоморфизм $F : U \xrightarrow{\sim} W$, такой что $\overline{F}(p_i) = q_i$ при всех i.

Доказательство. Зафиксируем некоторые векторы u_i и w_i, представляющие точки p_i и q_i, и возьмём $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ и $\{w_0, w_1, \dots, w_n\}$ в качестве базисов в U и W. Оператор $F : U \longrightarrow W$ тогда и только тогда переводит точку p_i в точку q_i, когда $F(u_i) = \lambda_i w_i$ для некоторых ненулевых $\lambda_i \in \Bbbk$. В частности, для того, чтобы точки $p_0, p_1, \dots, p_n$ переводились преобразованием $\overline{F}$ в точки $q_0, q_1, \dots, q_n$, необходимо и достаточно, чтобы оператор F в выбранных нами базисах имел диагональную матрицу с произвольными ненулевыми константами $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ по главной диагонали. Заметим теперь, что в разложении

$$u_{n+1} = x_0 u_0 + x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$$

[1]которая задается уравнением $x_0 = x_2$, пересекает ℓ в бесконечно удалённой точке $t = (0:1:0)$ и отвечает самой точке $p = q(\infty)$

[2]т. е. целых решений уравнения Пифагора $q_0^2 + q_1^2 = q_2^2$

все координаты x_i отличны от нуля, поскольку в противном случае $n+1$ точка[1] оказались бы в одной гиперплоскости, заданной условием обращения этой координаты в нуль. Если аналогичным образом разложить вектор $w_{n+1} = y_0 w_0 + y_1 w_1 + \dots + y_n w_n$ и записать равенство $F(u_{n+1}) = \lambda_{n+1} w_{n+1}$ в виде системы равенств на координаты, мы получим на константы $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ соотношения $y_i = \lambda_{n+1}\lambda_i x_i$ (при всех $0 \leqslant i \leqslant n$), из которых $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_{n+1}^{-1} \cdot (y_1/x_1,\, y_2/x_2,\, \dots,\, y_n/x_n)$. Таким образом, матрица оператора F определена однозначно с точностью до постоянного множителя $\lambda_{n+1}^{-1} \neq 0$. □

1.8.2. СЛЕДСТВИЕ. *Две матрицы тогда и только тогда задают одинаковые проективные изоморфизмы, когда они пропорциональны.* □

1.8.3. Линейная проективная группа. Согласно (n° 1.8.1) линейные проективные автоморфизмы пространства $\mathbb{P}(V)$ образуют группу, изоморфную фактор группе полной линейной группы $\mathrm{GL}(V)$ по подгруппе гомотетий $H = \{\lambda \cdot \mathrm{Id} \mid \lambda \neq 0\} \subset \mathrm{GL}(V)$. Эта фактор группа обозначается $\mathrm{PGL}(V) = \mathrm{GL}(V)/H$ и называется *проективной линейной группой*. Если при помощи выбора базиса отождествить линейную группу $\mathrm{GL}(V)$ с группой невырожденных матриц GL_{n+1}, проективная группа $\mathrm{PGL}(V)$ отождествится с группой PGL_{n+1} невырожденных матриц, рассматриваемых с точностью до пропорциональности.

1.9. Дробно-линейные преобразования прямой.

Группа $\mathrm{PGL}_2(\Bbbk)$ состоит из классов пропорциональности матриц $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с $ad - bc \neq 0$. Она действует на $\mathbb{P}_1$ по правилу

$$(x_0 : x_1) \overset{\overline{A}}{\longmapsto} (\,(ax_0 + bx_1) : (cx_0 + dx_1)\,)\ .$$

В стандартной аффинной карте $U_0 \simeq \mathbb{A}^1$ с аффинной координатой $t = x_1/x_0$, это действие имеет вид дробно линейного преобразования

$$t \longmapsto \frac{dt + c}{bt + a}$$

Единственное дробно линейное преобразование, переводящее три заданных различных точки q, r, s в ∞, 0, 1 таково:

$$t \longmapsto \frac{t - r}{t - q} \cdot \frac{s - r}{s - q} \tag{1-10}$$

1.9.1. ЛЕММА. *Если формула $\varphi(t) = g(t)/h(t)$, где $g, h \in \Bbbk[t]$, корректно определяет над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ биекцию $\varphi\ :\ \mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество}\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество}\}$, то φ — дробно линейный изоморфизм (в частности, продолжается на всю прямую).*

Доказательство. Переходя к однородным координатам $(x_0 : x_1)$, в которых $t = x_1/x_0$, и модифицируя, если потребуется, конечное множество, на котором φ не определено, мы можем переписать формулу, задающую φ, в виде $\varphi(x_0 : x_1) = (f_0(x_0, x_1) : f_1(x_0, x_1))$, где f_1 и f_2 — взаимно простые (в частности, непропорциональные) однородные многочлены от (x_0, x_1). Так как по условию эта формула корректно задаёт проективное отображение, т. е. для почти всех $(x_0 : x_1)$ и любого $\lambda \neq 0$

$$(f_0(x_0, x_1) : f_1(x_0, x_1)) = (f_0(\lambda x_0, \lambda x_1) : f_1(\lambda x_0, \lambda x_1)) = \left(\lambda^{\deg f_0} f_0(x_0, x_1) : \lambda^{\deg f_1} f_1(x_0, x_1)\right)\ ,$$

многочлены f_0 и f_1 обязаны иметь одинаковую степень $d = \deg f_0 = \deg f_1$. Обозначим пространство однородных многочленов степени d от (x_0, x_1) через $\mathbb{P}_d$. Поскольку почти любая точка $\vartheta = (\vartheta_0 : \vartheta_1) \in \mathbb{P}_1$ имеет ровно один прообраз, для бесконечно большого числа значений $\vartheta = (\vartheta_0 : \vartheta_1)$ однородный многочлен от $x = (x_0, x_1)$

$$\det(\varphi(x), \vartheta) = \vartheta_1 \cdot f_0(x_0, x_1) - \vartheta_0 \cdot f_1(x_0, x_1) \in \mathbb{P}_d$$

имеет на $\mathbb{P}_1$ ровно один, d-кратный корень $x = \varphi^{-1}(\vartheta)$ и, стало быть, лежит в на кривой Веронезе $C_d \subset \mathbb{P}_d$ из примера (n° 1.6.1) на стр. 8. Тем самым, кривая C_d имеет бесконечно много точек пересечения с прямой $(f_0, f_1) \subset \mathbb{P}_d$. Но, как мы видели в примере (n° 1.6.1), при $d \geqslant 2$ никакие три точки кривой C_d не лежат на одной прямой. Поэтому $d = 1$ и $\varphi \in \mathrm{PGL}_2(\Bbbk)$. □

[1] а именно, p_{n+1} и все p_i с номерами, отличными от номера занулившейся координаты вектора u_{n+1}

1.9.2. Двойное отношение. Правая часть равенства (1-10) называется *двойным отношением*[1] точек q, r, s, t и обозначается $[q,r,s,t]$. В однородных координатах двойное отношение четырёх точек выражается через попарные определители векторов, представляющих эти точки:

$$[p_1,\,p_2,\,p_3,\,p_4] = \frac{(p_1-p_3)\,(p_2-p_4)}{(p_1-p_4)\,(p_2-p_3)} = \frac{\det(p_1,p_3)\cdot\det(p_2,p_4)}{\det(p_1,p_4)\cdot\det(p_2,p_3)}\,. \tag{1-11}$$

Из определения сразу следует, что двойное отношение четырёх различных точек может принимать любые значения кроме ∞, 0 и 1 и что две упорядоченных четвёрки точек тогда и только тогда переводятся одна в другую дробно линейным преобразованием прямой, когда их двойные отношения одинаковы. Поскольку замена однородных координат является таким преобразованием, мы заключаем, что правая часть равенства (1-11) не зависит от выбора однородных координат, а средняя часть (содержащая разности аффинных координат точек) не зависит ни от выбора аффинной карты, ни от выбора локальной аффинной координаты в ней (при условии, что карта содержит все четыре точки, т. е. значения p_1, p_2, p_3, p_4 конечны).

Упражнение 1.10. Убедитесь в этом прямым вычислением.

Выясним теперь, как изменяется двойное отношение при перестановках точек. Из формулы (1-11) очевидно, что подгруппа Клейна[2] $\mathfrak{D}_2 \subset \mathfrak{S}_4$, состоящая из тождественного преобразования и одновременных транспозиций непересекающихся пар точек, не меняет двойного отношения:

$$[p_1,\,p_2,\,p_3,\,p_4] = [p_2,\,p_1,\,p_4,\,p_3] = [p_3,\,p_4,\,p_2,\,p_1] = [p_4,\,p_3,\,p_2,\,p_1] \tag{1-12}$$

Поэтому действие группы перестановок $\mathfrak{S}_4$ на множестве значений двойного отношения данных четырёх точек пропускается через действие фактор группы $\mathfrak{S}_4/\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{S}_3 = \mathfrak{D}_3$, которая кроме класса тождественного отображения содержит ещё три отражения (классы транспозиций $(1,2)$, $(1,3)$ и $(1,4)$) и два поворота (классы циклов $(1,2,3)$ и $(1,3,2)$). Если обозначить значение двойных отношений (1-12) через ϑ, из (1-11) получаем

$$\begin{aligned}
[p_1,\,p_2,\,p_3,\,p_4] = [p_2,\,p_1,\,p_4,\,p_3] = [p_3,\,p_4,\,p_2,\,p_1] = [p_4,\,p_3,\,p_2,\,p_1] &= \vartheta\\
[p_2,\,p_1,\,p_3,\,p_4] = [p_1,\,p_2,\,p_4,\,p_3] = [p_3,\,p_4,\,p_1,\,p_2] = [p_4,\,p_3,\,p_1,\,p_2] &= 1/\vartheta\\
[p_3,\,p_2,\,p_1,\,p_4] = [p_2,\,p_3,\,p_4,\,p_1] = [p_1,\,p_4,\,p_2,\,p_3] = [p_4,\,p_1,\,p_2,\,p_3] &= \vartheta/(\vartheta-1)\\
[p_4,\,p_2,\,p_3,\,p_1] = [p_2,\,p_4,\,p_1,\,p_3] = [p_3,\,p_1,\,p_2,\,p_4] = [p_1,\,p_3,\,p_2,\,p_4] &= 1-\vartheta\\
[p_2,\,p_3,\,p_1,\,p_4] = [p_3,\,p_2,\,p_4,\,p_1] = [p_1,\,p_4,\,p_3,\,p_2] = [p_4,\,p_1,\,p_3,\,p_2] &= (\vartheta-1)/\vartheta\\
[p_3,\,p_1,\,p_2,\,p_4] = [p_1,\,p_3,\,p_4,\,p_2] = [p_2,\,p_4,\,p_1,\,p_3] = [p_4,\,p_2,\,p_1,\,p_3] &= 1/(1-\vartheta)\,.
\end{aligned} \tag{1-13}$$

Упражнение 1.11. Проверьте это.

Имеются три специальных значения $\vartheta = -1,\ 2,\ 1/2$, которые не меняются, соответственно, при транспозициях $(1,2)$, $(1,3)$ и $(1,4)$ и циклически переставляются двумя поворотами, а также два специальных значения ϑ, равные двум корням уравнения[3] $x^2-x+1=0$, которые не меняются при поворотах и переставляются между собой при транспозициях. При всех остальных значениях ϑ мы получаем шесть различных значений двойного отношения.

1.9.3. Гармонические пары точек. Четвёрка точек $\{a,b;c,d\} \in \mathbb{P}_1$ называется *гармонической*, если их двойное отношение

$$[a,b,c,d] = -1\,.$$

---

[1] по-английски *cross-ratio*

[2] напомним, что если отождествить симметрическую группу $\mathfrak{S}_4$ с собственной группой куба, переставляющей 4 его диагонали, то возникает сюрьективный гомоморфизм $\mathfrak{S}_4 \twoheadrightarrow \mathfrak{S}_3$, задаваемый действием группы куба на трёх отрезках, соединяющих центры противоположных граней; ядом этого гомоморфизма является группа двуугольника $\mathfrak{D}_2$, или группа Клейна, состоящая из тождественного отображения и трёх поворотов на 180° вокруг осей, проходящих через центры противоположных граней куба

[3] т. е. отличным от -1 кубическим корням из единицы в поле $\Bbbk$

При выполнении этого условия говорят также, что пары точек (a, b) и (c, d) *гармоничны* по отношению друг к другу. Геометрически гармоничность означает, что в карте, для которой точка a лежит на бесконечности, точка b будет центром тяжести точек c и d. Алгебраически гармоничность равносильна тому, что изменение порядка точек в одной из пар не меняет двойного отношения, или тому, что двойное отношение не меняется при перемене пар местами — как мы уже говорили, из (1-13) вытекает, что оба эти условия равносильны между собой, и что гармоничность двух пар точек по отношению другу является *симметричным* отношением на парах *неупорядоченных* точек.

1.9.4. Пример: четырёхвешинник. С каждой четвёркой точек $a, b, c, d \in \mathbb{P}_2$, никакие 3 из которых не коллинеарны, связана конфигурация из трёх пар прямых, соединяющих пары данных точек (см. рис. 1◇7) и называемых *сторонами* четырёхвершинника $abcd$. Пусть эти прямые пересекаются в точках $x = (ab)\cap(cd)$, $y = (ac)\cap(bd)$, $z = (ad)\cap(bc)$. Тогда в каждом из трёх пучков прямых с центрами в точках x, y, z пара сторон четырёхвершинника гармонична по отношению к паре сторон треугольника xyz. Чтобы проверить это, запараметризуем пучок прямых, проходящих через точку x, точками прямой (ad) или точками прямой (bc) и покажем, что прямая (xy) пересекает прямые (ad) и (bc) по таким точкам x', x'', что $[a, d, z, x'] = [b, c, z, x''] = -1$. Поскольку центральные проекции из x и из y являются дробно линейными изоморфизмами между прямыми (ad) и (bc), мы имеем следующие равенства двойных отношений соответственных точек:

$$[a, d, z, x'] = [b, c, z, x''] = [d, a, z, x'] \; .$$

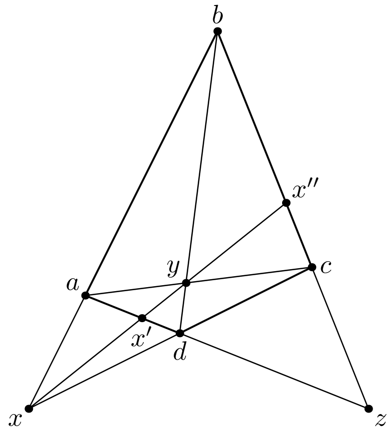


Рис. 1◇7. Четырёхвешинник.

Коль скоро результате перестановки первых двух точек двойное отношение не поменялось, оно равно -1, что и требовалось.

§2. Проективные квадрики и грассманианы.

Всюду в этом параграфе мы по умолчанию предполагаем, что $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$.

2.1. Квадрики и билинейные формы. Проективная гиперповерхность второй степени

$$Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V) \,, \quad q \in S^2V^* \,,\; q \neq 0 \,,$$

называется *проективной квадрикой*. В однородных координатах $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ относительно какого-нибудь базиса $e_0, e_1, \dots, e_n$ в V однородный квадратичный полином q однозначно записывается в виде

$$q(x) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i x_j = x \cdot A \cdot {}^t\!x \,,$$

где $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ — строка координат, ${}^t\!x$ — столбец координат, а $A = (a_{ij})$ — *симметричная* матрица, которая при $i \neq j$ имеет в качестве a_{ij} половину коэффициента при $x_i x_j$ в многочлене $q(x)$. Иначе говоря, для любого однородного многочлена $q(x)$ второй степени существует единственная симметричная билинейная форма $\widetilde{q}(u, w)$ на $V \times V$, такая что $q(x) = \widetilde{q}(x, x)$. Эта симметричная билинейная форма называется *поляризацией* квадратичной формы q и выражается через q несколькими эквивалентными способами:

$$\begin{aligned}\widetilde{q}(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i y_j = \frac{1}{2} \sum_i y_i \frac{\partial q(x)}{\partial x_i} = x \cdot A \cdot {}^t\!y = \\ = \frac{1}{2}\Big(q(x+y) - q(x) - q(y)\Big) = \frac{1}{4}\Big(q(x+y) - q(x-y)\Big) \,. \end{aligned} \tag{2-1}$$

Матрица A представляет собою *матрицу Грама* формы $\widetilde{q}$ в базисе $\{e_i\}$: $a_{ij} = \widetilde{q}(e_i, e_j)$.

Упражнение 2.1. Проверьте, что в другом базисе $(e'_0, e'_1, \dots, e'_n) = (e_0, e_1, \dots, e_n) \cdot C$ новая матрица Грама A' будет выражаться через A по формуле $A' = {}^t C \cdot A \cdot C$.

2.1.1. Определитель формы. Из упр. 2.1 вытекает, что при линейной замене координат *определитель Грама* $\det A$ умножается на *ненулевой квадрат* определителя матрицы перехода:

$$\det(A') = \det(A) \cdot \det{}^2(C) \,.$$

Таким образом, класс определителя Грама по модулю умножения на ненулевые квадраты из поля $\Bbbk$, не зависит от выбора базиса и является инвариантом квадрики по отношению к линейным заменам координат. Мы будем называть этот класс *определителем* формы q и обозначать $\det(q)$. Если $\det q \neq 0$, квадрика $V(q)$ называется *невырожденной* (или *гладкой*), в противном случае — *вырожденной* (или *особой*).

2.1.2. Ранг формы. Ещё одним важным инвариантом квадрики по отношению к линейным заменам координат является ранг её матрицы Грама. Он называется *рангом* формы q.

Упражнение 2.2. Убедитесь, что ранг матрицы Грама не зависит от выбора базиса.

Две квадрики называются *проективно эквивалентными*, если одна переводится в другую линейным проективным автоморфизмом объемлющего пространства.

2.1.3. ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА. *Для любой квадрики существует базис, в котором её матрица Грама диагональна.*

Доказательство. Поскольку $q \not\equiv 0$, то $q(e) = \widetilde{q}(e, e) \neq 0$ для некоторого $e \in V$, который мы возьмем в качестве первого вектора искомого базиса. Покажем, что $V = (\Bbbk \cdot e) \oplus e^{\perp}$, где $e^{\perp} \overset{\text{def}}{=} \{\, u \in V \mid \widetilde{q}(u, e) = 0 \,\}$ — ортогональное дополнение к e относительно формы $\widetilde{q}$. В самом деле, $(\Bbbk \cdot e) \cap e^{\perp} = 0$, и любой вектор $v \in V$ представляется в виде $\lambda e + u$ с $\lambda = \widetilde{q}(v, e)/\widetilde{q}(e, e)$ и $u = v - \lambda e \in e^{\perp}$. Заменяя V на $e^{\perp}$, мы, если $q|_{e^{\perp}} \not\equiv 0$, найдем второй базисный вектор и т. д. $\square$

2.1.4. СЛЕДСТВИЕ. *Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ для любой квадрики можно выбрать однородные координаты так, чтобы её уравнение в этих координатах имело вид $\sum\limits_{i=0}^{r-1} x_i^2 = 0$, где r — ранг квадрики. В частности, две квадрики проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый ранг.*

Доказательство. Ненулевые диагональные элементы матрицы Грама становятся единицами при замене базисных векторов e_i на $e_i/\sqrt{q(e_i)}$. $\square$

2.2. Квадрики на $\mathbb{P}_1$. Согласно теореме Лагранжа, над любым полем, в котором $1+1\neq 0$, неособую квадрику на $\mathbb{P}_1$ можно задать в подходящих однородных координатах уравнением $x_0^2+\alpha\, x_1^2=0$, в котором $\alpha=\det(q)\neq 0$, а особую — уравнением $x_0^2=0$.

Особая квадрика $x_0^2=0$ называется *двойной точкой*, ибо её уравнение — это квадрат линейной формы, обращающейся в нуль в точке $(0:1)$.

Неособая квадрика $x_0^2+\alpha\, x_1^2=0$ либо пуста, либо состоит из двух точек. Первое равносильно тому, что $-\alpha\in\Bbbk$ не является квадратом. Отметим, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ такого не бывает. Если же $-\alpha=\delta^2$, то $x_0^2+\alpha\, x_1^2=(x_0-\delta x_1)(x_0+\delta x_1)$ имеет на $\mathbb{P}_1$ два разных корня $(\pm\delta:1)$.

Поскольку $-\alpha$ с точностью до умножения на квадрат совпадает с $-\det(q)$, вид квадрики на $\mathbb{P}_1$ полностью задаётся классом её *дискриминанта* $D=-\det q$ по модулю умножения на ненулевые квадраты. А именно, если он нулевой, мы имеем двойную точку, если единичный — пару различных точек, в оставшемся случае (возможном лишь над незамкнутым полем) квадрика пуста.

2.2.1. СЛЕДСТВИЕ. *Для пересечения произвольной квадрики Q с произвольной прямой ℓ имеется ровно 4 возможности: или $\ell\subset Q$, или $\ell\cap Q$ есть двойная точка, или $\ell\cap Q$ состоит из 2 различных точек, или $\ell\cap Q=\varnothing$, причём над алгебраически замкнутым последний случай невозможен.* $\square$

2.3. Корреляция, ядро и особые точки. Со всякой билинейной формой q на V связан линейный *оператор корреляции* $\widehat{q}: V\longrightarrow V^*$, переводящий вектор $v\in V$ в линейную форму

$$\widehat{q}(v)\ :\ w\longmapsto \widetilde{q}(w,v)\ .$$

Матрица оператора корреляции, записанная в двойственных базисах $\{e_i\}\subset V$, $\{x_i\}\subset V^*$, совпадает с матрицей Грама A. В частности, q невырождена тогда и только тогда, когда $\widehat{q}$ изоморфизм. Пространство

$$\ker\widehat{q}=\{\,v\in V\mid \widetilde{q}(w,v)=0\ \ \forall\, w\in V\,\}$$

называется *ядром* квадратичной формы q. Поскольку $\dim\ker\widehat{q}=\dim V-\operatorname{rk}A$, мы ещё раз видим, что ранг формы является её инвариантом (не зависит от координат).

Проективизация ядра $\operatorname{Sing}Q\overset{\text{def}}{=}\mathbb{P}(\ker\widehat{q})\subset\mathbb{P}(V)$ называется *множеством особых точек* (или *вершинным пространством*) квадрики Q. Обратите внимание, что $\operatorname{Sing}Q\subset Q$.

2.3.1. ТЕОРЕМА. *Пересечение $Q'=L\cap Q$ с любым дополнительным к $\operatorname{Sing}Q$ проективным подпространством $L\subset\mathbb{P}(V)$ представляет собой невырожденную квадрику в L, и Q является линейным соединением*[1] *Q' и $\operatorname{Sing}Q$.*

Доказательство. Запишем $V=U\oplus K$, где $K=\ker\widehat{q}$ и $L=\mathbb{P}(U)$. Если $u\in U$ лежит в ядре $\widehat{q}|_U$, то $q(u,u')=0$ для всех $u'\in U$. Записывая произвольный вектор $v\in V$ как $v=u'+u''$ с $u'\in U$, $u''\in K$, будем иметь $\widetilde{q}(u,v)=\widetilde{q}(u,u'')+\widetilde{q}(u,u')=0$ для всех $v\in V$, откуда $u\in\ker\widehat{q}\cap U=0$. Таким образом, ограничение $q|_U$ невырождено. Всякая прямая $\ell=\mathbb{P}(W)\subset\mathbb{P}(U\oplus K)$, пересекающая $\operatorname{Sing}Q=\mathbb{P}(K)$, либо целиком лежит в $\operatorname{Sing}Q$, либо пересекает $L=\mathbb{P}(U)$. Во втором случае $\dim(W\cap K)=\dim(W\cap U)=1$ и в W имеется базис $\{p,u\}$ с $p\in K$, $u\in U$. Единственным ненулевым элементом матрицы Грама ограничения $q|_W$ в этом базисе может быть лишь $q(u)$, и если $q(u)\neq 0$, то $q|_W$ — это двойная точка p, а если $q(u)=0$, что $u\in Q'$

[1] т. е. объединением всех прямых, пересекающих как Q', так и $\operatorname{Sing}Q$

и $q|_W \equiv 0$. Таким образом, каждая прямая, пересекающая $\operatorname{Sing} Q$, но не лежащая в $\operatorname{Sing} Q$ целиком, либо больше вообще нигде не пересекает квадрику, либо пересекает Q' и целиком лежит на квадрике Q. $\square$

2.4. Касательное пространство. Прямая ℓ, проходящая через точку $p \in Q$, называется *касательной* к Q в p, если ℓ либо лежит на Q целиком, либо пересекает Q по двойной точке p. Объединение всех прямых, касающихся Q в точке p, называется *касательным пространством* к квадрике Q в точке $p \in Q$ и обозначается T_pQ.

2.4.1. ЛЕММА. *Прямая $\ell = (ab)$ касается квадрики Q, заданной уравнением $q(x) = 0$, в точке $a \in Q$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{q}(a, b) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\ell = \mathbb{P}(U)$. Матрица Грама ограничения $q|_U$ имеет в базисе $\{a, b\}$ вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \widetilde{q}(a,b) \\ \widetilde{q}(b,a) & \widetilde{q}(b,b) \end{pmatrix},$$

и $\det q|_U = 0 \iff \widetilde{q}(a,b) = \widetilde{q}(b,a) = 0$. $\square$

2.4.2. СЛЕДСТВИЕ. *Видимый из точки $b \notin Q$ контур квадрики*[1] *Q высекается из квадрики гиперплоскостью $\operatorname{Ann} \widehat{q}(b) = \{x \mid \widetilde{q}(b, x) = 0\}$.* $\square$

2.4.3. СЛЕДСТВИЕ. *Следующие условия на точку $a \in Q \subset \mathbb{P}(V)$ попарно эквиваленты:*

$$p \in \operatorname{Sing} Q \iff T_pQ = \mathbb{P}(V) \text{ есть все пространство} \iff \frac{\partial q}{\partial x_i}(p) = 0 \text{ для всех } i\,. \quad \square$$

2.4.4. СЛЕДСТВИЕ. *Если точка $p \in Q$ неособа, то $T_pQ = \{x \in \mathbb{P}_n \mid \widetilde{q}(p, x) = 0\}$ является гиперплоскостью коразмерности 1, а если $p \in Q$ особа, то $T_pQ = \mathbb{P}_n$ — это всё пространство.* $\square$

2.5. Полярное соответствие. Пространства $\mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}(V^*)$ называются *двойственными* проективными пространствами и (когда природа пространства V несущественна) обозначаются через $\mathbb{P}_n$ и $\mathbb{P}_n^\times$. Геометрически, каждое из них есть пространство гиперплоскостей в другом: однородное линейное уравнение

$$\langle \xi\,, v \rangle = 0 \quad \text{на} \quad \xi \in V^*\,, \ v \in V$$

при фиксированном $\xi \in \mathbb{P}^\times$ задаёт гиперплоскость в $\mathbb{P}_n$, а при фиксированном $v \in \mathbb{P}_n$ — гиперплоскость в $\mathbb{P}_n^\times$, состоящую из всех гиперплоскостей в $\mathbb{P}_n$, проходящих через точку $v \in \mathbb{P}_n$.

Для каждого $m = 0, 1, \dots, (n-1)$ имеется каноническая обращающая включение биекция между m-мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n$ и $(n-1-m)$-мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n^\times$, переводящая подпространство $L = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}_n$ в подпространство $L^\times = \mathbb{P}(\operatorname{Ann}(U)) \subset \mathbb{P}_n^\times$, образованное всеми гиперплоскостями, содержащими L. Эта биекция называется *проективной двойственностью* и позволяет переговаривать геометрические утверждения в двойственные геометрические утверждения, которые могут довольно сильно отличаться от исходных. Например, условие коллинеарности трёх точек двойственно условию наличия у трёх гиперплоскостей общего подпространства коразмерности 2.

Корреляция $\widehat{q}$, ассоциированная с невырожденной квадратичной формой q, индуцирует линейный проективный изоморфизм $\mathbb{P}(V) \xrightarrow{\widehat{q}} \mathbb{P}(V^*)$, который называется *полярным преобразованием* (или *поляритетом*) квадрики Q. Он переводит точку $p \in \mathbb{P}_n$ в гиперплоскость $L \subset \mathbb{P}_n$, заданную уравнением $\widetilde{q}(p, x) = 0$. Точка p и гиперплоскость L в этом случае называются *полюсом* и *полярой* друг друга относительно квадрики Q. Геометрически, поляра точки, не лежащей на квадрике, — это гиперплоскость, высекающая видимый из этой точки контур квадрики, а поляра точки, лежащей на квадрике, — это гиперплоскость, касающаяся квадрики в этой точке. Таким образом, всякую квадрику Q можно охарактеризовать как геометрическое место точек, лежащих на своих полярах.

[1] т.е. ГМТ касания с Q всевозможных касательных, опущенных на Q из b

Поскольку условие $\widetilde{q}(a,b) = 0$ симметрично по a и b, точка a лежит на поляре точки b, если и только если точка b лежит на поляре точки a. Такие точки называются *сопряжёнными* относительно квадрики Q.

Упражнение 2.3. Рассмотрим полярное преобразование евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно границы некоторого круга K. Циркулем и линейкой постройте поляру данной точки и полюс данной прямой (это особенно интересно в случае, когда точка лежит внутри круга, а прямая не пересекает круг).

2.5.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть $a, b \notin Q$ и прямая (ab) пересекает Q в двух различных точках c, d. Точки a, b тогда и только тогда сопряжены относительно квадрики Q, когда они гармоничны по отношению к точкам c, d.*

Доказательство. Ограничение квадрики Q на прямую $(ab) = (cd)$ задаётся в произвольных однородных координатах $(x_0 : x_1)$ на этой прямой квадратичной формой $q(x) = \det(x,c)\det(x,d)$, поляризация которой имеет вид $\widetilde{q}(x,y) = \frac{1}{2}\big(\det(x,c)\det(y,d)+\det(y,c)\det(x,d)\big)$. Условие сопряжённости $\widetilde{q}(a,b) = 0$ равносильно тому, что $\det(a,c)\det(b,d) = -\det(b,c)\det(a,d)$, т. е. равенству $[a,b,c,d] = -1$. □

2.5.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Для неособой квадрики $G \subset \mathbb{P}_n$ и произвольной квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ множество гиперплоскостей, полярных точкам $p \in Q$ относительно квадрики G, образуют квадрику в $Q_G^{x} \subset \mathbb{P}_n^{x}$, того же ранга, что и квадрика Q. Если Q и G имеют в некоторых однородных координатах матрицы Грама A и B соответственно, то квадрика $Q_G^{\times}$ имеет в двойственных однородных координатах матрицу $B^{-1}AB^{-1}$.*

Доказательство. Поляритет $\widehat{q} : \mathbb{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n^{\times}$ гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ переводит точку со столбцом координат x в точку двойственного пространства со строкой координат $x^t \cdot B$ и является проективным изоморфизмом. Полярные гиперплоскости $\xi = \widehat{q}(p)$ точек $p \in P$ задаются, таким образом, уравнением

$$0 = x^t \cdot A \cdot x = \left(\xi \cdot B^{-1}\right) \cdot A \cdot \left(\xi \cdot B^{-1}\right)^t = \xi \cdot B^{-1}AB^{-1} \cdot \xi^t ,$$

что и утверждалось. □

2.5.3. СЛЕДСТВИЕ. *Касательные пространства к гладкой квадрике $Q \subset \mathbb{P}_n$ образуют гладкую квадрику $Q^{\times} \subset \mathbb{P}_n^{\times}$. Матрицы Грама квадрик Q и $Q^{\times}$ в двойственных базисах пространств $\mathbb{P}_n$ и $\mathbb{P}_n^{\times}$ обратны друг другу.*

Доказательство. Положим в предыдущей теореме $G = Q$ (и, стало быть, $B = A$). Тогда гиперплоскости, полярные точкам $p \in Q$ относительно квадрики Q — это в точности касательные пространства T_pQ. □

2.5.4. Поляритеты над незамкнутыми полями. Над алгебраически незамкнутыми полями имеются (в том числе и непропорциональные друг другу) квадратичные формы q, задающие *пустые* квадрики Q. Тем не менее, соответствующие таким квадрикам полярные преобразования будут геометрически наблюдаемы.

Упражнение 2.4. Опишите геометрически полярное преобразование евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно «мнимой» окружности $x^2 + y^2 = -1$.

На языке поляритетов пустота квадрики означает, что никакая точка не лежит на своей поляре.

2.5.5. ЛЕММА. *Два поляритета совпадают, если и только если задающие их квадратичные формы пропорциональны.*

Доказательство. Это сразу следует из леммы n° 1.8.1. □

2.5.6. СЛЕДСТВИЕ. *Над алгебраически замкнутым полем две квадрики совпадают тогда и только тогда, когда их уравнения пропорциональны.*

Доказательство. Пусть $Q = Q'$. Поскольку при ограничении на любое дополнительное к $\operatorname{Sing} Q = \operatorname{Sing} Q'$ подпространство уравнения обеих квадрик не поменяются, можно считать обе квадрики невырожденными, а тогда всё следует из леммы n° 2.5.5. □

2.6. Пространства квадрик. Пространство $\mathbb{P}(S^2V^*)$ классов пропорциональных квадратичных форм называется *пространством квадрик*[1] на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$. Это проективное пространство размерности $(n+1)(n+2)/2 - 1 = n(n+3)/2$.

2.6.1. Пример: пространство коник. Квадрики на $\mathbb{P}_2$ называются *проективными кониками*. Они образуют пятимерное проективное пространство $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Над алгебраически замкнутым полем имеются ровно три проективно неэквивалентных коники:

- *двойная прямая* $x_0^2 = 0$ (ранг 1, все точки особые);
- *распавшаяся коника*[2] $x_0^2 + x_1^2 = 0$ (ранг 2, одна особая точка);
- *гладкая коника* $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$.

Удобной моделью неособой коники в $\mathbb{P}_2$ является *коника Веронезе* C_2 из примера (n° 1.6.1) на стр. 8. Она живёт в пространстве $\mathbb{P}_2$ квадрик на $\mathbb{P}_1$ и состоит из всех вырожденных квадрик:

$$C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \ : \quad a_0a_2 - a_1^2 = 0 \right\}$$

Вырожденная квадрика на $\mathbb{P}_1$ — это двойная точка, и её уравнение $a_0\,x_0^2 + 2a_1\,x_0x_1 + a_2\,x_1^2$ есть квадрат линейной формы $(\alpha_0x_0 + \alpha_1x_1)^2$, что доставляет рациональную параметризацию неособой коники на $\mathbb{P}_2$ однородными многочленами второй степени: $a_0 = \alpha_0^2$, $\quad a_1 = \alpha_0\alpha_1$, $\quad a_2 = \alpha_1^2$.

2.6.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Невырожденная коника пересекает произвольную кривую, заданную однородным уравнением степени d, не более, чем по $2\,d$ точкам, либо целиком содержится в этой кривой в качестве компоненты.*

Доказательство. Запараметризуем неособую конику однородными полиномами степени 2 от параметра $t = (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_1$ (например, спроектировав эту конику из лежащей на ней точки на какую-нибудь прямую, как в (n° 1.7.1)). Коника будет пересекать кривую с уравнением $f(q) = 0$ при значениях параметра t, удовлетворяющих уравнению $f(q(t)) = 0$, левая часть которого либо тождественно равна нулю, либо однородна степени $2\,d$. В первом случае вся коника содержится в кривой, во втором случае имеется не более $2\,d$ точек пересечения. □

2.6.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Каждые 5 точек в $\mathbb{P}_2$ лежат на некоторой конике. Если никакие 4 из пяти точек не коллинеарны, то такая коника единственна, а если никакие 3 не коллинеарны, то она ещё и невырождена.*

Доказательство. Поскольку при фиксированном p уравнение $q(p) = 0$ линейно по q, коники, проходящие через $p \in \mathbb{P}_2$ образуют гиперплоскость в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Поскольку любые 5 гиперплоскостей в $\mathbb{P}_5$ имеют непустое пересечение, требуемая коника существует. Если какие-то три из точек коллинеарны, то коника содержит проходящую через них прямую, и потому распадается на эту прямую и прямую, проходящую через две другие точки. Если никакие три из точек не коллинеарны, всякая проходящая через них коника автоматически неособа и единственна по n° 2.6.2. □

2.6.4. СЛЕДСТВИЕ. *Каждые 5 прямых без тройных пересечений на $\mathbb{P}_2$ касаются единственной невырожденной коники.*

Доказательство. Это утверждение проективно двойственно предыдущему: пять точек на $\mathbb{P}_2^\times$, двойственные к данным пяти прямым на $\mathbb{P}_2$, лежат на единственной гладкой конике $C \subset \mathbb{P}_2^\times$, и двойственная ей коника $C \subset \mathbb{P}_2$ есть единственная гладкая коника, касающаяся пяти данных прямых. □

2.6.5. Пример: пространство квадрик в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ — это $\mathbb{P}_9 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. В частности, любые 9 точек, а также любые 3 прямые в $\mathbb{P}_3$ лежат на некоторой квадрике (достаточно взять по 3 точки на каждой прямой и провести квадрику через эти 9 точек).

Особые квадрики в $\mathbb{P}_3$ (над алгебраически замкнутым полем) суть:

[1] над незамкнутым полем $\Bbbk$ не все точки этого пространства отвечают непустым квадрикам, и разные точки могут задавать одинаковые квадрики (например, пустые), так что правильнее было бы говорить о «пространстве поляритетов», чем о «пространстве квадрик», однако наше название является общепринятым

[2] т. е. объединение двух прямых $x_0 = \pm i\,x_1$, пересекающихся в особой точке $(0:0:1)$

- *двойная плоскость* $x_0^2 = 0$ (ранг 1)
- *распавшаяся квадрика*[1] $x_0^2 + x_1^2 = 0$ (ранг 2)
- *простой конус*[2] $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ (ранг 3)

Поскольку ни на одной из особых квадрик нет трёх попарно скрещивающихся прямых, мы заключаем, что любые три попарно непересекающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$ лежат на *гладкой* квадрике.

Удобной геометрической моделью гладкой квадрики в $\mathbb{P}_3$ является *квадрика Сегре* Q_s , образованная матрицами ранга 1 в проективном пространстве $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}\,(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\Bbbk))$ всех 2×2-матриц:

$$Q_s = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} \neq 0 \;\middle|\; \det \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} = \alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10} = 0 \right\}. \tag{2-2}$$

Всякий линейный оператор $\Bbbk^2 \xrightarrow{F} \Bbbk^2$ ранга 1 имеет одномерное ядро и одномерный образ, т. е. определяет единственные с точностью до пропорциональности вектор $v \in \Bbbk^2$ и ковектор $\xi \in \Bbbk^{2*}$, такие что $\mathrm{im}\,(F)$ натянут на v, а $\ker(F) = \mathrm{Ann}\,(\xi)$. Действие F на произвольный вектор $u \in \Bbbk^2$ задаётся в этом случае формулой

$$F(u) = \xi(u)\cdot v\,. \tag{2-3}$$

Оператор F, действующий по таком правилу, называется *тензорным произведением* ковектора ξ и вектора v и обозначается $\xi\otimes v$. Если $v = (x_0 : x_1)$, а $\xi = (\xi_0 : \xi_1)$, то матрица $F = \xi\otimes v$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 x_0 & \xi_1 x_0 \\ \xi_0 x_1 & \xi_1 x_1 \end{pmatrix} \tag{2-4}$$

Упражнение 2.5. Убедитесь, что любая $m\times n$-матрица (a_{ij}) ранга 1 получается умножением столбца высоты n справа на строку ширины m, т. е. имеет $a_{ij} = \xi_i x_j$ для подходящих (ξ_i) и (x_j).

Таким образом возникает *отображение Сегре* $s : \mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_3$, где $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(\Bbbk^2)$, $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}\left(\mathrm{End}(\Bbbk^2)\right)$, которое переводит $(\xi, v) \in \mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1$ в оператор $\xi\otimes v$ с матрицей (2-4) и биективно отображает $\mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1$ на квадрику Сегре $Q_s \subset \mathbb{P}_3$. Два семейства координатных прямых на $\mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1$ переходят при этом в два семейства прямых на Q_s : прямая $\xi = \mathrm{const}$ изобразится на квадрике Сегре проективизацией двумерного пространства матриц ранга 1 с фиксированным отношением $(\xi_0 : \xi_1)$ между столбцами, а прямая $v = \mathrm{const}$ — матрицами с фиксированным отношением $(x_0 : x_1)$ между строками. В каждом из этих семейств все прямые попарно скрещиваются, а любые две прямые из разных семейств пересекаются. Каждая точка Q_s является точкой пересечения пары прямых из различных семейств. Никаких других прямых на квадрике Сегре нет, поскольку всякая прямая, лежащая на Q_s и проходящая через какую-нибудь точку $p\in Q_s$ содержится в плоской конике $Q_s \cap T_pQ_s$, которая исчерпывается парой проходящих через p прямых из описанных выше двух семейств.

Упражнение 2.6. Покажите, что следующие три свойства оператора $\Bbbk^2 \xrightarrow{F} \Bbbk^2$ попарно эквивалентны: а) $F \in T_{\xi\otimes v}Q_s$; б) $F(\mathrm{Ann}\,(\xi)) \subset \Bbbk\cdot v$; в) $F = \xi\otimes w + \eta\otimes v$ для некоторых $\eta\in\mathbb{P}_1^\times$, $w\in\mathbb{P}_1$; и что действие ассоциированного с невырожденным оператором $F\in\mathrm{GL}(\Bbbk^2)$ дробно линейного изоморфизма $\overline{F} : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_1$ на произвольную точку $p = \mathrm{Ann}\,(\xi) \in \mathbb{P}_1$ допускает следующее геометрическое описание: проведём в $\mathbb{P}_3$ плоскость π через точку F и отвечающую ξ прямолинейную образующую $L' = \xi\times\mathbb{P}_1$ на квадрике Сегре $Q_s\subset\mathbb{P}_3$; тогда π пересечёт Q_s по распавшейся конике, состоящей из образующей L' и ещё одной образующей L'', лежащей в другом семействе, и имеющей вид $L'' = \mathbb{P}_1\times v$, где $v = \overline{F}(p)$.

2.6.6. СЛЕДСТВИЕ. *Через любые три попарно непересекающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$ проходит единственная (и автоматически неособая) квадрика. Эта квадрика представляет собою объединение всех прямых, пересекающих все три заданных.*

Доказательство. Всякая квадрика, проходящая через три скрещивающихся прямые, является неособой квадрикой Сегре, заметаемой двумя семействами прямолинейных образующих. Все три заданные прямые должны лежать в одном из них. Но тогда любая прямая из другого семейства пересекают каждую из них, и наоборот, всякая прямая пересекающая каждую из них, лежит на квадрике (ибо пересекает её по трём точкам), причём в другом по отношению к трём заданным прямым семействе. □

[1] т. е. объединение двух плоскостей $x_0 = \pm i\,x_1$, или, что то же самое, линейное соединение особой прямой (e_2, e_3) и пары точек $(1 : \pm i : 0 : 0)$, составляющих неособую квадрику на дополнительной прямой (e_0, e_1)

[2] т. е. линейное соединение одной особой точки с невырожденной коникой в дополнительной плоскости

Упражнение 2.7. Сколько прямых пересекают 4 данные попарно скрещивающиеся прямые в пространствах а) $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ б) $\mathbb{A}(\mathbb{C}^4)$ в*) $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ г*) $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$ (найдите все возможные ответы и выясните, какие из них устойчивы к малым шевелениям четырёх данных прямых[1]).

2.7. Линейные подпространства на невырожденной квадрике. Факт наличия двух семейств прямолинейных образующих, заметающих невырожденную квадрику в $\mathbb{P}_3$, распространяется в старшие размерности следующим образом. Рассмотрим n-мерную гладкую квадрику

$$Q_n = V(q) \subset \mathbb{P}_{n+1} = \mathbb{P}(V)$$

и лежащее на ней линейное подпространство $L = \mathbb{P}(W)$. Условие $L \subset V(q)$ означает, что

$$\widehat{q}(W) \subset \operatorname{Ann}(W)\,.$$

Поскольку форма q невырождена, её корреляция $\widehat{q} : V \longrightarrow V^*$ инъективна. Стало быть,

$$\dim W = \dim \widehat{q}(W) \leqslant \dim \operatorname{Ann}(W) = \dim V - \dim W\ ,$$

откуда $\dim(W) \leqslant \dim(V)/2 = \frac{n}{2} + 1$ и $\dim L \leqslant [n/2]$, где $[\,*\,]$ означает целую часть. Иными словами, на гладкой n-мерной квадрике $Q_n \subset \mathbb{P}_{n+1}$ нет проективных подпространств размерности большей, чем половина размерности квадрики.

С другой стороны, всякое подпространство $L \subset Q_{n-1}$, проходящее через произвольно заданную точку $p \in Q_n$, содержится в пересечении $Q_n \cap T_pQ_n$ этой квадрики с касательной гиперплоскостью в точке p. Оказывается, что такое пересечение всегда является особой квадрикой в $\mathbb{P}_n = T_pQ_n$ с единственной особой точкой p, т. е. представляет собой конус с вершиной в точке p над неособой квадрикой Q_{n-2}, лежащей в не проходящей через p гиперплоскости $\mathbb{P}_{n-1} \subset T_pQ_n$. Это вытекает из следующего более общего утверждения:

2.7.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Сечение неособой квадрики Q произвольной гиперплоскостью Π либо является неособой квадрикой в Π, либо имеет единственную особую точку $p \in \Pi \cap Q$, причём второе означает, что $\Pi = T_pQ$ касается квадрики в точке p.*

Доказательство. Пусть $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$ и $\Pi = \mathbb{P}(W)$. Первое утверждение следует из оценки:

$$\dim \ker(\widehat{q}|_W) = \dim\bigl(W \cap \widehat{q}^{-1}(\operatorname{Ann} W)\bigr) \leqslant \dim \widehat{q}^{-1}(\operatorname{Ann} W) = \dim \operatorname{Ann} W = \dim V - \dim W = 1\ .$$

Если ядро ограничения $\widehat{q}|_W$ не нулевое, а одномерное с базисом p, то $p \in Q \cap \Pi$ имеет $\operatorname{Ann}(\widehat{q}(p)) = W$, откуда $T_pQ = \Pi$. Наоборот, если $\Pi = T_pQ = \mathbb{P}(\operatorname{Ann} \widehat{q}(p))$, то вектор $p \in \operatorname{Ann} \widehat{q}(p)$ лежит в ядре ограничения $\widehat{q}$ на $\operatorname{Ann} \widehat{q}$. □

2.7.2. СЛЕДСТВИЕ. *$[n/2]$-мерные проективные подпространства, лежащие на неособой n-мерной квадрике Q_n и проходящие через произвольно заданную точку $p \in Q_n$, взаимно однозначно соответствуют всем $([n/2]-1)$-мерным проективным подпространствам, лежащим на неособой $(n-2)$-мерной квадрике Q_{n-2}. Подпространств размерности $> [n/2]$ на неособой n-мерной квадрике Q_n нет.* □

2.7.3. Пример: гладкие квадрики над алгебраически замкнутым полем. Предыдущее следствие позволяет последовательно описывать изменение геометрии линейных подпространств, лежащих на неособой квадрике $Q_n \subset \mathbb{P}_{n+1}$ над алгебраически замкнутым полем. На нульмерной и одномерной гладких квадриках $Q_0 \subset \mathbb{P}_1$ и $Q_1 \subset \mathbb{P}_2$ лежат только 0-мерные подпространства. Следующие две квадрики — двумерная $Q_2 \subset \mathbb{P}_3$ и трёхмерная $Q_3 \subset \mathbb{P}_4$ — не содержат плоскостей, но каждая точка $p \in Q_2$ лежит на паре прямых, проходящих через p и две точки неособой квадрики $Q_0 \subset T_pQ_2 \setminus \{p\}$, а через каждую точку $p \in Q_3$ проходит одномерное семейство прямых, образующих конус с вершиной p над гладкой коникой $Q_1 \subset T_pQ_4 \setminus \{p\}$. Далее, гладкая четырёхмерная квадрика $Q_4 \subset \mathbb{P}_5$ не содержит 3-мерных подпространств, но через любую

[1] УКАЗАНИЕ: примените «метод геометрических мест»: рассмотрите все прямые, пересекающие некоторые три из заданных четырёх, и выясните, какие из них пересекают оставшуюся четвёртую прямую.

точку $p \in Q_4$ проходят два пучка[1] плоскостей, взаимно однозначно соответствующих двум семействам прямых на квадрике Сегре $Q_2 \simeq \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \subset T_pQ_4 \setminus \{p\}$, и т. д.

2.8. Многообразие прямых в $\mathbb{P}_3$. Множество всех прямых в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ или, что то же самое, множество двумерных векторных подпространств в 4-мерном векторном пространстве V обозначается $\mathrm{Gr}(2,4)$ и является специальным примером *многообразия Грассмана*

$$\mathrm{Gr}(k,n) = \mathrm{Gr}(k,V) = \{U \subset V \mid \dim U = k\}\,, \qquad \dim V = n\ ,$$

точками которого являются, по определению, всевозможные k-мерные векторные подпространства в данном n-мерном векторном пространстве V. Проективное пространство $\mathbb{P}(V) = \mathrm{Gr}(1,V)$ и двойственное проективное пространство $\mathbb{P}(V^*) = \mathrm{Gr}(\dim V - 1, V)$ также являются специальными случаями грассманианов, и $\mathrm{Gr}(2,4)$ — это простейший грассманиан, не являющийся проективным пространством.

Множество k-мерных подпространств n-мерного векторного пространства V вкладывается в проективизацию k-той внешней степени пространства V при помощи *отображения Плюккера*, которое сопоставляет k-мерному подпространству $U \subset V$ его старшую внешнюю степень $\Lambda^k U$, являющуюся одномерным векторным подпространством в $\Lambda^k V$:

$$\mathrm{Gr}(k,V) \overset{p}{\hookrightarrow} \mathbb{P}(\Lambda^k V)\ :\ (U \subset V) \longmapsto (\Lambda^k U \subset \Lambda^k V)\ . \tag{2-5}$$

Для $\mathrm{Gr}(2,4)$ это отображение переводит прямую $(a,b) \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ в разложимый бивектор $a \wedge b \in \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$.

Упражнение 2.8. Убедитесь, что различным прямым отвечают непропорциональные бивекторы.

Поскольку $a \wedge b \wedge a \wedge b = 0$, образ плюккерова отображения попадает на *квадрику Плюккера*

$$P = \{\omega \in \Lambda^2 V \mid \omega \wedge \omega = 0\} \subset \mathbb{P}_5\ , \tag{2-6}$$

образованную бивекторами с квадратом нуль. Из курса линейной алгебры известно, что для любого бивектора $\omega \in \Lambda^2 V$ в пространстве V можно подобрать базис e_0, e_1, e_2, e_3, в котором он запишется либо как $\omega = e_0 \wedge e_1$, либо как $\omega = e_0 \wedge e_1 + e_2 \wedge e_3$. В первом случае бивектор разложим и лежит на квадрике Плюккера. Во втором случае $\omega \wedge \omega = 2\, e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \neq 0$, и значит, такой бивектор не может быть разложимым. Следовательно квадрика Плюккера (2-6) состоит *только* из разложимых бивекторов.

Если зафиксировать в V базис e_0, e_1, e_2, e_3 и ассоциированный с ним базис

$$e_{ij} \overset{\mathrm{def}}{=} e_i \wedge e_j\ , \quad 0 \leqslant i < j \leqslant 3$$

шестимерного пространства $\Lambda^2 V$, и организовать координаты векторов $a = \sum a_i e_i$ и $b = \sum b_i e_i$ в строки 2×4-матрицы

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\ , \tag{2-7}$$

то вложение Плюккера сопоставит такой матрице бивектор

$$a \wedge b = \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant 3} \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} \cdot e_{ij}\ ,$$

координатами которого будут шесть старших миноров матрицы (2-7) (они называются *плюккеровыми координатами* прямой $(a,b) \subset \mathbb{P}_3$ в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$). Условие, что бивектор $\omega = \sum x_{ij} e_{ij}$ лежит на квадрике (2-6), запишется квадратным уравнением

$$x_{01}x_{23} - x_{02}x_{13} + x_{03}x_{12} = 0 \tag{2-8}$$

[1] напомним, что *пучок* в этом контексте означает семейство фигур, образующих *прямую* в подходящем проективном пространстве фигур, ср. с (n° 1.6)

Упражнение 2.9. Существует ли комплексная 2×4-матрица, шесть 2×2-миноров которой образуют (неупорядоченное) множество: а) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ б) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (если да, предъявите такую матрицу явно).

Итак, множество всех прямых в $\mathbb{P}_3$ представляет собою гладкую 4-мерную квадрику

$$P \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V) .$$

2.8.1. Связки и пучки прямых в $\mathbb{P}_3$. Множество прямых на $\mathbb{P}_3$ называется *связкой*, если оно представляется плоскостью $\pi \subset P \subset \mathbb{P}_5$. Если $\pi \subset P$ натянуто на 3 неколлинеарные точки $p_i = \mathfrak{u}(\ell_i)$, $i = 1, 2, 3$, т.е. $\pi = P \cap T_{p_1}P \cap T_{p_2}P \cap T_{p_3}P$, то соответствующая связка прямых состоит из всех прямых, которые пересекают 3 данные попарно пересекающиеся прямые ℓ_i. Три прямых в $\mathbb{P}_3$ попарно пересекаются только тогда, когда они либо лежат в одной плоскости, либо проходят через одну точку. Таким образом, существуют два геометрически разных типа связок прямых на $\mathbb{P}_3$:

α-плоскость $\pi_\alpha(O) \subset P$ является образом *α-связки*, состоящей из всех прямых, проходящих через данную точку $O \in \mathbb{P}_3$, и линейно порождается плюккеровыми образами любых трёх некомпланарных прямых, проходящих через O;

β-плоскость $\pi_\beta(\Pi) \subset P$ является образом *β-связки*, состоящей из всех прямых, лежащих в данной плоскости $\Pi \in \mathbb{P}_3$, и линейно порождается плюккеровыми образами любых трёх лежащих в Π прямых, не проходящих там через одну точку.

При этом любые две плоскости одного и того же типа обязательно пересекаются ровно по одной точке:

$$\pi_\beta(\Pi_1) \cap \pi_\beta(\Pi_2) = \mathfrak{u}(\,\Pi_1 \cap \Pi_2\,)$$
$$\pi_\alpha(O_1) \cap \pi_\alpha(O_2) = \mathfrak{u}(\,(O_1O_2)\,)\ ,$$

а две плоскости $\pi_\beta(\Pi)$ и $\pi_\alpha(O)$ различных типов либо не пересекаются (когда $O \notin \Pi$), либо пересекаются по прямой, изображающей на квадрике Плюккера пучок прямых $\ell \subset \Pi$, проходящих $O \in \Pi$ (когда $O \in \Pi$).

Упражнение 2.10. Покажите, что всякая прямая, лежащая на плюккеровой квадрике, является пересечением α- и β-плоскости (т.е. все пучки прямых в $\mathbb{P}_3$ исчерпываются пучками прямых, лежащих в некоторой плоскости и проходящих там через одну точку).

Указание. (Ср. с общей теорией из n° 2.7.3.) Рассмотрим конус $C = P \cap T_pP$. Он имеет вершину в p и состоит из всех прямых, проходящих через p и лежащих на P. Фиксируем 3-мерную гиперплоскость $H \subset T_pP$, которая не содержит p. Тогда $G = C \cap H$ есть невырожденная квадрика на H. Таким образом, любая прямая, проходящая через p, имеет вид $(pp') = \pi_\alpha \cap \pi_\beta$, где $p' \in G$ и плоскости π_α, π_β натянутые на p и две прямые, проходящие через p' в G (см. рис. 2$\diamond$1).

2.8.2. Клеточное разбиение $\mathrm{Gr}(2, 4)$. Зафиксируем некоторую 3-мерную гиперплоскость $H \subset T_pP$, дополнительную к точке $p \in P$ в 4-мерном касательном пространстве T_pP к квадрике Плюккера $P \subset \mathbb{P}_5$ (как в указании к предыдущему упражнению). Особая квадрика $C = P \cap T_pP$ представляет собой простой конус с вершиной p над неособой квадрикой $G = H \cap P$, изоморфной квадрике Сегре в $\mathbb{P}_3$ (см. рис. 2$\diamond$1). Рассмотрим следующую стратификацию плюккеровой квадрики замкнутыми подмножествами:

$$\begin{tikzcd}
 & & \pi_\alpha \arrow[dr, hook] & & \\
p \arrow[r, hook] & \pi_\alpha \cap \pi_\beta \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & C \arrow[r, hook] & P \\
 & & \pi_\beta \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

Она индуцирует разбиение P в дизъюнктное объединение открытых клеток, изоморфных аффинным пространствам:

$$\mathrm{Gr}(2,4) \;=\; \mathbb{A}^0 \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \begin{pmatrix} \mathbb{A}^2 \\ \sqcup \\ \mathbb{A}^2 \end{pmatrix} \sqcup \mathbb{A}^3 \sqcup \mathbb{A}^4$$

(каждая аффинная клетка здесь есть плотное открытое подмножество в соответствующем страте предыдущей диаграммы, дополнительное к объединению всех содержащихся в нём стратов меньшей размерности). В самом деле, сначала мы имеем проективную прямую без точки: $(\pi_\alpha \cap \pi_\beta) \setminus p \simeq \mathbb{A}^1$, затем пару проективных плоскостей без прямой:

$$\pi_\alpha \setminus (\pi_\alpha \cap \pi_\beta) \simeq \pi_\beta \setminus (\pi_\alpha \cap \pi_\beta) \simeq \mathbb{A}^2 \,,$$

далее $C \setminus (\pi_\alpha \cup \pi_\beta) \simeq \mathbb{A}^1 \times \Big(G \setminus \big(G \cap T_{p'}G\big)\Big)$ (поскольку C является конусом над G), и, наконец, $G \setminus \big(G \cap T_{p'}G\big) \simeq \mathbb{A}^2$ и $Q \setminus C \simeq \mathbb{A}^4$ в силу следующей леммы:

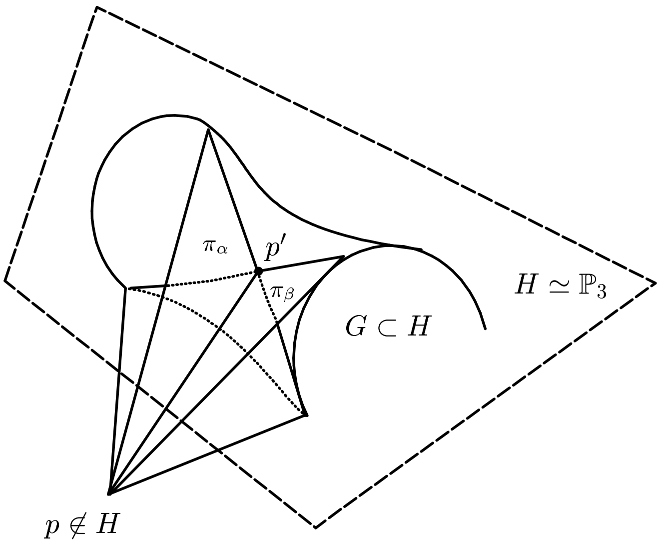


Рис. 2◇1. Конус $C = P \cap T_pP$.

2.8.3. ЛЕММА. *Проекция неособой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ из любой точки $p \in Q$ на произвольную гиперплоскость $H \not\ni p$ устанавливает биекцию*[1] *дополнения $Q \setminus (Q \cap T_pQ)$ с аффинным пространством $\mathbb{A}^{n-1} = H \setminus (H \cap T_pQ)$.*

Доказательство. Каждая прямая, которая проходит через p и не касается Q, пересекает квадрику ещё ровно в одной отличной от p точке, координвты которой, по теореме Виета, рационально зависят от прямой. □

Упражнение 2.11*. Если вы знакомы с клеточными гомологиями, покажите, что над $\mathbb{C}$ все группы нечетномерных гомологий $\mathrm{Gr}(2,4)$ равны нулю, а группы четномерных гомологий суть $H_0 = H_2 = H_6 = H_8 = \mathbb{Z}$ и $H_4 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Попытайтесь вычислить и гомологии действительного грассманиана (это сложнее, поскольку в вещественном случае граничные отображения будут нетривиальны).

2.9. Геометрия грассманиана $\mathbf{Gr}(m,d) = \mathbf{Gr}(m,V)$. На проективном языке, $\mathrm{Gr}(m,d)$ есть множество всех $(m-1)$-мерных проективных подпространств в $\mathbb{P}_{d-1}$. Двойственность

$$V \supset U \leftrightarrow \mathrm{Ann}\, U \subset V^*$$

задаёт каноническое отождествление $\mathrm{Gr}(m,V) \simeq \mathrm{Gr}(d-m,V^*)$.

Упражнение 2.12. Пусть $\dim V = 4$. Всякая невырожденная квадрика $q \subset \mathbb{P}(V)$ определяет поляритет $\widehat{q} : V \xrightarrow{\sim} V^*$, который, в свою очередь, задаёт автоморфизм грассманиана $\mathrm{Gr}(2,4)$ действующий по описанному выше правилу $U \longmapsto \mathrm{Ann}\,\widehat{q}(U)$. Покажите, что этот автоморфизм отображает α-плоскости в β-плоскости и наоборот.

Грассманиан $\mathrm{Gr}(m,V)$ вкладывается в проективное пространство $\mathbb{P}(\Lambda^m V)$ при помощи *отображения Плюккера*

$$\mathrm{Gr}(m,V) \overset{\mathfrak{u}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}(\Lambda^m V) \,, \tag{2-9}$$

которое переводит m-мерное подпространство $U \subset V$ в одномерное подпространство $\Lambda^m U \subset \Lambda^m V$. Если U порождается векторами $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, то, с точностью до пропорциональности, $\mathfrak{u}(U) = u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_m$ (выбор другого базиса в U, например, $w_i = \sum a_{ij} u_j$, заменяет, как мы знаем, $u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_m$ на $w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_m = \det(a_{ij}) \cdot u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_m$).

[1] на самом деле эта биекция является изоморфизмом *алгебраических многообразий* (определение абстрактного алгебраического многообразия будет дано ниже в n° 4.3

2.9.1. ЛЕММА. *Плюккерово отображение (2-9) действительно иньективно, и устанавливает биекцию между грассманианом* $\mathrm{Gr}(m, V)$ *и множеством разложимых однородных грассмановых многочленов* m*-той степени (рассматриваемых с точностью до пропорциональности).*

Доказательство. Пусть $U \neq W$. Выберем в V базис так, чтобы первые r векторов $v_1, v_2, \dots, v_r$ этого базиса были базисом в $U_1 \cap U_2$, следующие $(m-r)$ векторов $u_1, u_2, \dots, u_{m-r}$ вместе с $\{v_\nu\}$ давали базис в U, а далее следующие $(m-r)$ векторов $w_1, w_2, \dots, w_{m-r}$ вместе с $\{v_\nu\}$ давали базис в W. Тогда $\mathfrak{u}(U) = v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r \wedge u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_{m-r}$ и $\mathfrak{u}(W) = v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r \wedge w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_{m-r}$ будут разными базисными мономами грассмановой алгебры. $\square$

На координатном языке, если зафиксировать в V базис $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$, точку $U \in \mathrm{Gr}(m,d)$ можно представлять $(d \times m)$-матрицей A_U, строки которой являются координатами какого-либо набора векторов $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, порождающих U. Разумеется, такое представление не единственно: выбору другой системы образующих $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ в U будет отвечать другая матрица $A'_U = M_{wu} A_U$, получающаяся из A_U умножением слева на невырожденную квадратную $m\times m$-матрицу перехода[1]. Таким образом, грассманиан $\mathrm{Gr}(m,d)$ представляет собой фактор пространство пространства $\mathrm{Mat}_{m\times d}(k)$ по действию $\mathrm{GL}_m(k)$ умножениями слева, точно также как $\mathbb{P}_{d-1}$ является фактор пространством пространства координатных строк по действию группы гомотетий $\mathrm{GL}_1(k) = k^*$. Матрица A_U является, таким образом, прямым аналогом однородных координат.

Упражнение 2.13. Убедитесь, что на координатном языке плюккерово вложение сопоставляет $(d\times m)$-матрице A_U набор всех её $(m \times m)$-миноров и эквивариантно в том смысле, что при умножении A_U справа на $M \in \mathrm{GL}_m$ все $(m\times m)$-миноры умножатся на одну и ту же константу $\det M$.

2.9.2. Стандартное аффинное покрытие и аффинные координаты. Аналогом i-той стандартной аффинной карты U_i на проективном пространстве $\mathbb{P}_n$ (состоящей из всех векторов, i-тая координата которых отлична от нуля, так что её можно сделать равной 1, умножая на подходящую константу) является на произвольном грассманиане $\mathrm{Gr}(m,d)$ множество $\mathfrak{U}_I$, состоящее из всех подпространств $U \subset V$, матрица A_U которых содержит невырожденную $(m\times m)$-подматрицу $A_{U,I} \subset A_U$ в столбцах с номерами $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$, так что умножая A_U слева на $M = A_{U,I}^{-1} \in \mathrm{GL}_m$, можно сделать эту подматрицу единичной. Множество $\mathfrak{U}_i$ является полным прообразом относительно плюккерова вложения (2-9) стандартной аффинной карты $U_I \subset \mathbb{P}(\Lambda^m V)$, в которой отлична от нуля I-тая координата (вдоль вектора $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$).

Иначе можно сказать, что $\mathfrak{U}_I$, состоит из всех $U \subset V$, которые изоморфно проектируются на I-тое координатное подпространство в V, натянутое на базисные векторы $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m}$, вдоль всех остальных базисных векторов e_j с $j \notin I$. В качестве системы образующих такого подпространства можно взять прообразы базисных векторов e_i, $i \in I$, относительно упомянутой проекции. Соответствующая матрица A_U как раз и будет содержать единичную подматрицу в I-столбцах. Таким образом, такая матрица однозначно определяется по U. Мы будем обозначать её $A^I(U)$ и использовать $m\,(d-m)$ её матричных элементов $\left(a^I_{ij}(U)\right)$ с $j \notin I$ (стоящих вне столбцов $(i_1, i_2, \dots, i_m)$ в $A^I(U)$) в качестве аффинных координат в карте $\mathfrak{U}_I \subset \mathrm{Gr}(m,d)$. Карты $\mathfrak{U}_I$ называются *стандартными* и покрывают весь $\mathrm{Gr}(m,d)$, когда I пробегает все возрастающие подмножества длины m в $\{1, 2, \dots, d\}$.

Упражнение 2.14. Если вы знакомы с основными понятиями дифференциальной топологии, проверьте, что действительные и комплексные грассманианы являются гладкими (более того, аналитическими) многообразиями.

2.9.3. Клеточное разбиение. Метод Гаусса для решения систем линейных однородных уравнений показывает, что любое подпространство $U \subset V$ порождается *единственным* набором

[1] она определяется соотношением $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = M_{wu} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$

векторов $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, матрица координат которого имеет *строгий ступенчатый вид* (такой, что в столбцах, содержащих углы ступенек, стоит единичная $(m \times m)$-подматрица).

Упражнение 2.15. Докажите, что различные строго ступенчатые матрицы действительно задают разные подпространства в V.

Таким образом, мы имеем биекцию между $\mathrm{Gr}(m,d)$ и множеством всех строго ступенчатых $(m \times d)$ – матриц. Последнее является дизъюнктным объединением непересекающихся аффинных пространств, т. к. все ступенчатые матрицы с фиксированной *формой ступенек* образуют аффинное пространство, размерность которого равна числу «свободных» клеток, не занятых «обязательными» нулями и единицами, предписанными данной формой ступенек.

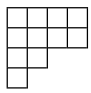
Форма ступенек однозначно определяется возрастающим набором $I = (i_1, i_2, \ldots, i_m)$ номеров столбцов, в которых располагаются углы ступенек. В частности, имеется ровно $\binom{d}{m}$ разных форм ступенек. Строго ступенчатая матрица с данной формой ступенек I имеет $m\,(d-m)$ клеток вне единичной подматрицы, стоящей в I-столбцах, и в левой части ν-той строки есть ещё $i_\nu - \nu$ «обязательных» нулей, стоящих вне этой единичной подматрицы, Таким образом, матрица с формой ступенек I имеет

$$m\,(d-m) - \sum_{\nu=1}^{m}(i_\nu - \nu) = \dim \mathrm{Gr}(m,d) - \left(|I| - \frac{m\,(m+1)}{2}\right)$$

«свободных клеток», т. е. соответсвующий страт грассманиана представляет собой аффинное пространство коразмерности $|I| - m(m+1)/2$.

Другим общепринятым способом описания формы ступенек являются *диаграммы Юнга*, или *разбиения*. Сопоставим ступенчатой матрице неубывающую последовательность неотрицательных целых чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, в которой число λ_ν указывает на сколько клеток угол ступеньки, стоящей в ν-той *считая снизу* строке, сдвинут вправо от самого левого возможного своего положения. Таким образом, углы ступенек в матрице типа $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ находятся в столбцах с номерами $i_\nu = (m+1-\nu) + \lambda_{m+1-\nu}$.

Диаграммы Юнга обычно рисуют в виде выровненных по левому краю клетчатых полосочек, длины которых равны последовательным элементам соответствующего разбиения, например:

$(4,4,2,1) \quad \rightsquigarrow$ 

На грассманиане $\mathrm{Gr}(4,10)$ этой диаграмме отвечает 13-мерное аффинное пространство строго ступенчатых матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \end{pmatrix}$$

нулевому разбиению $(0,0,0,0)$ отвечает самое левое из всех возможных положений ступенек, которое описывает 24-мерное пространство матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

(стандартную аффинную карту $\mathfrak{U}_{(1,2,3,4)}$ грассманиана $\mathrm{Gr}(4,10)$), а разбиение $(6,6,6,6)$ описывает нульмерное аффинное пространство — ровно одну матрицу, ступеньки которой находятся в самом правом положении:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Упражнение 2.16. Убедитесь, что имеется биекция между m-элементными возрастающими подмножествами $I \subset \{1, 2, \dots, d\}$ и диаграммами Юнга $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, содержащимися в прямоугольнике размером $m \times (d - m)$.

Итак, в терминах диаграмм Юнга, грассманиан $\mathrm{Gr}(m, d)$ разлагается в объединение непересекающихся аффинных клеток $\overset{\circ}{\sigma}_\lambda$, которые называются (открытыми) *клетками Шуберта* и занумерованы всевозможными диаграммами Юнга, умещающимися в прямоугольнике $m \times (d - m)$. Клетка $\overset{\circ}{\sigma}_\lambda$ состоит из всех матриц с формой ступенек λ, изоморфна $\mathbb{A}^{m(d-m)-|\lambda|}$ и имеет коразмерность[1] $|\lambda| = \sum \lambda_\nu$. Замыкание σ_λ клетки $\overset{\circ}{\sigma}_\lambda$ называется (замкнутым) *циклом Шуберта*.

2.9.4. Пример: гомологии[2] комплексных грассманианов. Над полем $\mathbb{C}$ циклы Шуберта σ_λ образуют свободный базис группы целочисленных гомологий $\Lambda(m, d) \overset{\text{def}}{=} H_*(\mathrm{Gr}(m, \mathbb{C}^d), \mathbb{Z})$, поскольку построенное нами клеточное разбиение не содержит клеток нечётных (вещественных) размерностей, и все граничные операторы клеточного цепного комплекса будут нулевыми.

Упражнение 2.17*. Опишите из каких клеток σ_μ состоит замыкание данной клетки σ_l и попытайтесь точно вычислить граничный оператор клеточного цепного комплекса на вещественном грассманиане $\mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^d)$.

Топологическое пересечение циклов задаёт на $\mathbb{Z}$-модуле $\Lambda(m, d)$ структуру коммутативного кольца. В частности, гомологический класс пересечения циклов Шуберта можно явно представить в виде целочисленной линейной комбинации циклов Шуберта. В общем случае ответ даётся в виде набора довольно нетривиальных комбинаторных правил преобразования диаграмм, который известен как *исчисление Шуберта*[3]. Говоря формально, кольцо $\Lambda(m, d)$ изоморфно усечённому кольцу симметрических многочленов — фактору

$$\Lambda(m, d) = \mathbb{Z}[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m]/(\eta_{d-m+1}, \dots, \eta_{d-1}, \eta_d)$$

где через ε_i обозначен i-тый элементарный симметрический многочлен[4], а через η_i — i-тый полный симметрический многочлен[5], который, согласно основной теореме об элементарных симметрических функциях, является многочленом от ε_i. Циклу Шуберта σ_λ при этом изоморфизме отвечает класс (по модулю $h_j(e)$) симметрического многочлена Шура[6] s_λ (выраженного в виде многочлена от ε_i). Однако доказательство этого, а главное, явное описание соответствующих правил разложения одних многочленов через другие, увело бы нас далеко за рамки этого курса (см. цитированные выше книги). Вместо этого мы, в качестве иллюстрации, явно вычислим кольцо пересечений грассманиана $\mathrm{Gr}(2, 4)$.

Упражнение 2.18. Проверьте, что 6 циклов Шуберта на квадрике Плюккера $\mathrm{Gr}(2, 4) \simeq P \subset \mathbb{P}_5$ суть: $\sigma_{00} = P$; $\sigma_{22} = p = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}_5$; $\sigma_{10} = P \cap T_pP$; $\sigma_{11} = \pi_\alpha(O)$, где $O = (0 : 0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}_3$; $\sigma_{20} = \pi_\beta(\Pi)$, где $\Pi \subset \mathbb{P}_3$ задано уравнением $x_0 = 0$; $\sigma_{21} = \pi_\alpha(O) \cap \pi_\beta(\Pi)$.

Очевидно, что циклы, суммарная коразмерность которых меньше четырёх, имеют нулевые пересечения. Пересечение циклов дополнительной размерности уже было вычислено нами в n° 2.8.1 и упр. 2.10: $\sigma_{10}\sigma_{21} = \sigma_{20}^2 = \sigma_{11}^2 = \sigma_{22}$, и $\sigma_{20}\sigma_{11} = 0$. Те же геометрические соображения показывают, что $\sigma_{10}\sigma_{20} = \sigma_{10}\sigma_{11} = \sigma_{21}$. Для вычисления σ_{10}^2 реализуем σ_{10} как

$$\sigma_{10}(\ell) = P \cap T_{\mathfrak{u}(\ell)}P = \{\ell'' \subset \mathbb{P}_3 \mid \ell \cap \ell'' \neq \varnothing\} .$$

Тогда σ_{10}^2 гомологичен пересечению $\sigma_{10}(\ell) \cap \sigma_{10}(\ell')$, которое при общем положении пары прямых ℓ, ℓ' представляет собой неособую квадрику Сегре с рис. 2◇1. Однако если продеформировать прямую ℓ' так, чтобы она стала пересекаться с ℓ, эта квадрика продеформируется в своём классе гомологий в пару

[1] число $|\lambda| = \sum \lambda_\nu$ обычно называют *весом* диаграммы λ; множество всех диаграмм данного веса n описывает все способы разбить n в сумму неупорядоченных целых неотрицательных слагаемых, откуда и происходит термин «разбиение»

[2] этот пример обращён тем, кто знаком с основными понятиями клеточной топологии, и его можно пропустить без ущерба для понимания остального текста

[3] см. книги: *W. Fulton Young Tableaux* (CUP, LMS Stud. Texts 35), *Ф. Гриффитс, Дж. Харрис Принципы алгебраической геометрии, I* (Мир, 1982), *У. Фултон Теория пересечений* (Мир, 1989), *И. Макдоналд Симметрические функции и многочлены Холла* (Мир, 1985)

[4] т.е. сумма всех полилинеых мономов степени i от m формальных переменных $(x_1, x_2, \dots, x_m)$

[5] т.е. сумма вообще всех мономов степени i от m формальных переменных $(x_1, x_2, \dots, x_m)$

[6] т.е. сумма всех мономов степени $|\lambda|$, которые можно получить перемножением m формальных переменных $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, расставленных (с повторениями) во все клетки диаграммы λ так, чтобы номера переменных неубывали слева направо вдоль строк и строго возрастали сверху вниз вдоль столбцов; в частности, $\sigma_{(i)} = \eta_i$, а $\sigma_{(11\dots1)} = \varepsilon_i$

пересекающихся плоскостей — α-связку с центром $O = \ell \cap \ell'$ и α-связку в плоскости Π, натянутой на ℓ и ℓ': $\sigma_{10}(\ell) \cap \sigma_{10}(\ell') = \pi_\alpha(O) \cup \pi_\beta(\Pi)$, т. е. $\sigma_{10}^2 = \sigma_{20} + \sigma_{11}$.

Например, мы получаем ещё одно, «топологическое» решение задачи о том, сколько прямых пересекает заданные 4 попарно скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$: если данные 4 прямые ℓ_i находятся в достаточно общем положении (таком, что пересечение циклов $\sigma_{10}(\ell_i)$ вычисляет четырёхкратным самопересечением σ_{10}^4), ответ находится формальным вычислением в $\Lambda(2,4)$:

$$\sigma_{10}^4 = (\sigma_{20} + \sigma_{11})^2 = \sigma_{20}^2 + \sigma_{11}^2 = 2\sigma_{22}$$

что означает, что есть ровно 2 таких прямых.

§3. Аффинная алгебраическая геометрия.

Всюду на протяжении этого параграфа слово «кольцо» по умолчанию означает *коммутативное кольцо с единицей*, а гомоморфизмы колец по умолчанию предполагаются отображающими единицу в единицу.

3.1. Целые элементы и целые расширения. Рассмотрим коммутативное кольцо B и его подкольцо $A \subset B$. Элемент $b \in B$ называется *целым* над A, если он удовлетворяет условиям такой леммы:

3.1.1. ЛЕММА. *Следующие свойства элемента $b \in B$ попарно эквивалентны:*

(1) $b^m = a_1 b^{m-1} + \cdots + a_{m-1} b + a_0$ *для некоторого* $m \in \mathbb{N}$ *и некоторых* $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$;

(2) A*-модуль, натянутый на все неотрицательные степени* $\{b^i\}_{i \geqslant 0}$, *линейно порождается над* A *конечным числом элементов;*

(3) *существует конечно порожденный над* A *и* B*-точный*[1] A*-подмодуль* $M \subset B$, *такой что* $bM \subset M$.

Доказательство. Импликации (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) тривиальны. Чтобы вывести (1) из (3), допустим, что $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ порождают M над A и что оператор умножения $M \xrightarrow{m \mapsto bm} M$ представляется матрицей Y, т.е. $(be_1, be_2, \dots, be_m) = (e_1, e_2, \dots, e_m) \cdot Y$. Заметим, что если линейное отображение $M \xrightarrow{\varkappa} M$ представляется матрицей X, т.е. переводит $(e_1, e_2, \dots, e_m) \longmapsto (e_1, e_2, \dots, e_m) \cdot X$, то $(\det X) \cdot M \subset \operatorname{im} \varkappa$ (это получается применением к $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ обеих частей матричного тождества $\det X \cdot \mathrm{Id} = X \cdot \widehat{X}$, в котором $\widehat{X}$ — присоединённая к X матрица из алгебраических дополнений). В нашем случае нулевой оператор $M \xrightarrow{\varkappa} 0$ представляется матрицей $X = b \cdot \mathrm{Id} - Y$, а значит, умножение на $\det(b \cdot \mathrm{Id} - Y)$ аннулирует M. Из B-точности модуля M вытекает тогда, что $\det(b \cdot \mathrm{Id} - Y) = 0$. Это полиномиальное уравнение относительно b с коэффициентами из A и старшим членом b^m, как и требуется в (1). □

3.1.2. Пример: целые алгебраические числа. Пусть $K \supset \mathbb{Q}$ — конечномерное[2] расширение полей. Элементы $z \in K$ называются *алгебраическими числами*. Алгебраическое число z является целым над $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда когда существует инвариантное относительно умножения на z подпространство $W \subset K$ и некоторый базис в нём, такой что умножение на z записывается в этом базисе целочисленной матрицей[3].

Упражнение 3.1. Докажите, что подходящее целочисленное кратное произвольного алгебраического числа является целым алгебраическим числом и что у поля K всегда можно выбрать базис над $\mathbb{Q}$, состоящий из целых алгебраических чисел.

Упражнение 3.2. Опишите все целые (над $\mathbb{Z}$) числа в полях $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ и $\mathbb{Q}[\omega]$, где $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

3.1.3. Целое замыкание. Множество всех $b \in B$, целых над данным подкольцом $A \subset B$, называется *целым замыканием* A в B. Если оно не содержит ничего, кроме элементов самого A, то A называется *целозамкнутым* в B. Наоборот, если все $b \in B$ целы над A, то B называется *целым расширением* кольца A или *целой A-алгеброй*.

3.1.4. Пример: инварианты действия конечной группы. Пусть конечная группа $\mathfrak{G}$ действует на кольце B кольцевыми автоморфизмами $B \xrightarrow{g} B$ $(g \in \mathfrak{G})$. Тогда B цело над подкольцом $\mathfrak{G}$-инвариантов:

$$A = B^{\mathfrak{G}} \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in B \mid ga = a \ \ \forall g \in \mathfrak{G}\} .$$

Действительно, если $b_1, b_2, \dots, b_s \in B$ образуют $\mathfrak{G}$-орбиту любого данного $b = b_1 \in B$, то многочлен $\beta(t) = \prod (t - b_i)$ имеет старший коэффициент 1, лежит в $A[t]$ и аннулирует b.

---

[1] A-модуль M называется *B-точным*, если для всякого $b \in B$ условие $bM = 0$ влечет равенство $b = 0$

[2] как векторное пространство над $\mathbb{Q}$

[3] исторически понятие целого элемента именно так и возникло

3.1.5. ЛЕММА. *Целое замыкание A является подкольцом*[1] *в B. Если $C \supset B$ — другое коммутативное кольцо и элемент $c \in C$ цел над целым замыканием A в B, то c цел и над A (в частности, если B — целая A-алгебра, то любая целая B-алгебра является также и целой A-алгеброй).*

Доказательство. Если $p^m = x_{m-1}\,p^{m-1} + \cdots + x_1\,p + x_0$, $\quad q^n = y_{n-1}\,q^{n-1} + \cdots + y_1\,q + y_0$ для $p, q \in B$, $x_\nu, y_\mu \in A$, то A-модуль, натянутый на $p^i q^j$ с $0 \leqslant i \leqslant (m-1)$, $0 \leqslant j \leqslant (n-1)$, является B-точным (ибо содержит 1) и переходит в себя при умножении и на $p+q$ и на pq. Аналогично, если $c^r = z_{r-1}\,c^{r-1} + \cdots + z_1\,c + z_0$ и все z_ν — целые над A, то умножение на c сохраняет B-точный A-модуль, натянутый на достаточное число произведений $c^i z_1^{j_1} z_2^{j_2} \cdots z_r^{j_r}$. □

3.1.6. СЛЕДСТВИЕ (ЛЕММА ГАУССА). *Пусть $A \subset B$ — произвольное расширение коммутативных колец, и многочлены $f, g \in B[x]$ оба имеют старший коэффициент 1. Все коэффициенты их произведения $h(x) = f(x)g(x)$ тогда и только тогда будут целыми над A, когда целы над A все коэффициенты и у $f(x)$ и у $g(x)$.*

Доказательство. Рассмотрим какое-либо расширение $C \supset B$, над которым f и g полностью разлагаются на линейные множители[2], т. е. $f(x) = \prod(t - \alpha_\nu)$, $g(x) = \prod(t - \beta_\mu)$ в $C[x]$ для некоторых $\alpha_\nu, \beta_\mu \in C$. По лемме из n° 3.1.5, все коэффициенты $h(x) = \prod(t - \alpha_\nu)\prod(t - \beta_\mu)$ являются целыми над A $\iff$ все α_ν, β_μ являются целыми над A $\iff$ все коэффициенты $f(x)$ и $g(x)$ являются целыми над A. □

3.1.7. ЛЕММА. *Пусть $B \supset A$ — целое над A. Если B — поле, то A также является полем. Наоборот, если A — поле, и в B нет делителей нуля, то B — поле.*

Доказательство. Если B — поле, целое над A, то обратный элемент $a^{-1} \in B$ к произвольному ненулевому $a \in A$ удовлетворяет уравнению $a^{-m} = \alpha_1\,a^{1-m} + \cdots + \alpha_{m-1}\,a^{-1} + \alpha_0$ с $\alpha_\nu \in A$. Умножая обе части на a^{m-1}, получаем $a^{-1} = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{m-1}\,a^{m-2} + \alpha_0\,a^{m-1} \in A$. Обратно, если A — поле, и B — целая A-алгебра, то все неотрицательные целые степени b^i любого $b \in B$ порождают конечномерное векторное пространство V над A. Если $b \neq 0$, и в B нет делителей нуля, то линейный оператор $V \xrightarrow{x \mapsto bx} V$ не имеет ядра, а потому — биективен. Прообраз $1 \in V$ относительно этого оператора и есть b^{-1}. □

3.1.8. Пример: нормальные кольца. Коммутативное кольцо A без делителей нуля называется *нормальным*, если A целозамкнуто в своём поле частных Q_A. В частности, любое поле, по определению, нормально. Из упр. 3.2 вытекает, что кольцо $\mathbb{Z}$ нормально. Точно так же доказывается, что *любое факториальное кольцо A нормально*: многочлен $a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \cdots + a_{m-1} t + a_m \in A[t]$ аннулирует дробь $p/q \in Q_A$ с $\text{НОД}(p, q) = 1$, только если $q | a_0$ и $p | a_m$, а стало быть, $a_0 = 1 \Rightarrow q = 1$.

Если кольцо A нормально, то из доказанной в n° 3.1.6 леммы Гаусса вытекает её более традиционная версия: если $f \in A[x]$ раскладывается $Q_A[x]$ на два множителя со старшими коэффициентами 1, то оба они автоматически лежат в $A[x]$.

3.2. Алгебраичность. Если кольцо $A = \Bbbk$ является полем, то целость над $\Bbbk$ элемента b какой-либо $\Bbbk$-алгебры $B \supset \Bbbk$ равносильна его *алгебраичности* над $\Bbbk$, т. е. тому, что b удовлетворяет *какому-нибудь* уравнению $f(b) = 0$ с ненулевым $f \in \Bbbk[x]$ или, что то же самое, тому что *гомоморфизм вычисления*

$$\mathrm{ev}_b\,:\,\Bbbk[x] \xrightarrow{f(x) \mapsto f(b)} B \tag{3-1}$$

имеет ненулевое ядро. Образ гомоморфизма (3-1) обозначается через $\Bbbk[b]$ и представляет собою наименьшую $\Bbbk$-подалгебру в B, содержащую 1 и b.

Если b не алгебраичен[3], то $\ker \mathrm{ev}_b = 0$ и гомоморфизм (3-1) отождествляет $\Bbbk[b]$ с кольцом многочленов (в частности, $\Bbbk[b]$ в этом случае бесконечномерно как векторное пространство над $\Bbbk$). Если b алгебраичен, то поскольку $\Bbbk[x]$ является областью главных идеалов, $\ker(\mathrm{ev}_b) = (\mu_b)$, где

---

[1] в частности, все A-кратные целых элементов — целые

[2] Для любого коммутативного кольца B и любого непостоянного $h(x) \in B[x]$ со старшим коэффициентом 1 существует коммутативное кольцо $C \supset B$ и $c_\nu \in C$, такие что $h(x) = \prod(x - c_\nu)$ в $C[x]$. Они строятся по индукции следующим образом. Фактор кольцо $F = B[x]/(f)$ содержит B как подкольцо классов вычетов констант, а элемент $\varkappa \stackrel{\text{def}}{=} x \pmod h \in F$ является корнем h. Это означает, что остаток от деления $h(x)$ на $(x - \varkappa)$ в $F[x]$ равен нулю, и в $F[x]$ мы имеем разложение $h(x) = (x - \varkappa) \cdot \widetilde{h}(x)$. Далее повторяем эту процедуру для $\widetilde{h}$ и F вместо h, B и т. д.

[3] элементы, не являющиеся алгебраическими (над $\Bbbk$), также называют *трансцендентными* (над $\Bbbk$)

$\mu_b \in \Bbbk[x]$ однозначно задаётся как многочлен наименьшей степени со старшим коэффициентом 1, аннулирующий b. Многочлен μ_b называется *минимальным многочленом* элемента b над $\Bbbk$. Если он неприводим (что равносильно отсутствию делителей нуля в $\Bbbk[b] = \Bbbk[x]/(\mu_b)$), то алгебра $\Bbbk[b]$ автоматически является полем (см. n° 3.1.7).

Упражнение 3.3. Свяжите размерность $\Bbbk[b]$ как векторного пространства над $\Bbbk$ с $\deg \mu_b$.

3.2.1. ЛЕММА. *Пусть поле $\Bbbk = Q_A$ является полем частных коммутативного кольца A без делителей нуля. Если элемент b какой-либо Q_A-алгебры B цел над A, то он алгебраичен над Q_A и все коэффициенты его минимального многочлена $\mu_b \in Q_A[x]$ целы над A.*

Доказательство. Поскольку b цел над A, он удовлетворяет уравнению $f(b) = 0$, в котором $f \in A[x]$ имеет старший коэффициент 1. Тем самым, $\ker \mathrm{ev}_b \neq 0$ и $f = \mu_b \cdot q$ в кольце $Q_A[x]$. По лемме Гаусса (см. n° 3.1.6), все коэффициенты и у μ_b, и у q должны быть целы над A. □

3.2.2. СЛЕДСТВИЕ. *Пусть A — нормальное кольцо (см. n° 3.1.8) с полем частных Q_A, и B — произвольная Q_A-алгебра. Если элемент $b \in B$ цел над A, то его минимальный многочлен над полем Q_A автоматически лежит в $A[x]$.* □

3.3. Конечно порожденные коммутативные $\Bbbk$-алгебры. Пусть $\Bbbk$ — произвольное поле. Коммутативная $\Bbbk$-алгебра B называется *конечно порожденной*, если она является фактор алгеброй кольца многочленов от конечного числа переменных с коэффициентами из $\Bbbk$, т.е. если существует эпиморфизм $\Bbbk$-алгебр

$$\Bbbk[x_1, x_2, \ldots, x_m] \xrightarrow{\pi} B\,.$$

Образы $b_i = \pi(x_i) \in B$ называются *образующими алгебры* B, а $\ker \pi \subset \Bbbk[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ называется *идеалом соотношений* между ними.

3.3.1. ТЕОРЕМА. *Конечно порожденная $\Bbbk$-алгебра может быть полем только если все её элементы алгебраичны над $\Bbbk$.*

Доказательство. Пусть $\Bbbk$-алгебра B порождается элементами $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ и является полем. Доказывать алгебраичность B будем индукцией по m. Случай $m = 1$, $B = \Bbbk[b]$ очевиден: если b трансцендентен, то гомоморфизм (3-1) отождествляет B с кольцом многочленов $\Bbbk[x]$, которое не является полем.

Пусть $m > 1$. Если b_m алгебраичен над $\Bbbk$, то $\Bbbk[b_m]$ — поле и B алгебраично над $\Bbbk[b_m]$ по предположению индукции. По лемме n° 3.1.5 B будет тогда алгебраично и над $\Bbbk$. Таким образом, достаточно показать, что b_m *должен* быть алгебраичен над $\Bbbk$.

Допустим, что b_m трансцендентен. Тогда гомоморфизм (3-1) продолжается до изоморфизма поля рациональных функций $\Bbbk(x)$ с наименьшим подполем $\Bbbk(b_m) \subset B$, содержащим b_m. По предположению индукции, B алгебраично над $\Bbbk(b_m)$, так что каждая из образующих $b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}$ удовлетворяет некоторому полиномиальному уравнению с коэффициентами из $\Bbbk(b_m)$. Умножая эти уравнения на подходящие многочлены от b_m, мы можем добиться того, чтобы все их коэффициенты лежали в $\Bbbk[b_m]$, а также сделать все их старшие коэффициенты равными одному и тому же многочлену, который мы обозначим через $p(b_m) \in \Bbbk[b_m]$. В результате поле B оказывается целым над подалгеброй $F = \Bbbk[b_m\,,\, 1/p(b_m)] \subset B$, порожденной над $\Bbbk$ элементами b_m и $1/p(b_m)$. По лемме n° 3.1.7 эта подалгебра F должна быть полем, что невозможно, поскольку, скажем, $1 + p(b_m)$ не обратим в F.

В самом деле, если существует многочлен $g \in \Bbbk[x_1, x_2]$, такой что $g\,(\,b_m\,,\,1/p(b_m)\,) \cdot (1 + p(b_m)) = 1\,,$ то, записывая рациональную функцию $g\,(\,x\,,\,1/p(x)\,)$ в виде $h(x)/p^k(x)$, где $h \in \Bbbk[x]$ не делится на p, и умножая обе части предыдущего равенства на $p^k(b_m)$, мы получим на b_m полиномиальное уравнение $h(b_m) \cdot (p(b_m) + 1) = p^{k+1}(b_m)$, которое нетривиально, поскольку $h(x)(1 + p(x))$ не делится на $p(x)$. □

3.3.2. СЛЕДСТВИЕ. *Всякое поле $\mathbb{F}$, которое конечно порождено как алгебра над своим подполем $\Bbbk \subset \mathbb{F}$, конечномерно как векторное пространство над $\Bbbk$ (число $[\mathbb{F} : \Bbbk] \overset{\text{def}}{=} \dim_{\Bbbk} \mathbb{F}$ называется в этом случае степенью расширения $\Bbbk$ до $\mathbb{F}$).* □

3.3.3. Базисы трансцендентности. Предположим, что $\Bbbk$-алгебра A не имеет делителей нуля. Мы обозначаем через Q_A ее поле частных, а через $\Bbbk(a_1, a_2, \ldots, a_m) \subset Q_A$ — наименьшее подполе, содержащее заданные элементы $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$. Элементы $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ называются *алгебраически независимыми* над $\Bbbk$, если между ними нет никаких полиномиальных соотношений вида

$$\varphi(a_1, a_2, \dots, a_m) = 0 \quad \text{с } f \in A[x_1, x_2, \dots, x_m]\,,$$

т. е. если отображение вычисления $\mathrm{ev}_{(a_1,a_2,\dots,a_m)} : \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_m] \xrightarrow{x_i \mapsto a_i} A$ иньективно. Если $a_1, a_2, \dots, a_m$ алгебраически независимы, то отображение вычисления продолжается до вложения полей

$$\Bbbk(x_1, x_2, \dots, x_m) \xhookrightarrow{f(x_1,x_2,\dots,x_m)\mapsto f(a_1,a_2,\dots,a_m)} Q_A\,.$$

Алгебраически независимый набор элементов $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ называется *базисом трансцендентности* для A, если любой $p \in A$ алгебраичен над $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m)$. В этом случае, любой $q \in Q_A$ также алгебраичен над $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m)$, ибо по лемме из n° 3.1.7 целое замыкание $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m)$ в Q_A является полем, содержащим A, а значит, и Q_A.

3.3.4. ЛЕММА. *Любая конечно порожденная $\Bbbk$-алгебра A без делителей нуля либо алгебраична над $\Bbbk$, либо имеет базис трансцендентности, который можно строить, выкидывая лишние элементы из произвольного набора $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$, такого что A алгебраична над $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m)$ (в частности, любая система образующих A как $\Bbbk$-алгебры содержит некоторый базис трансцендентности).*

Доказательство. Если имеется полиномиальное соотношение $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_m) = 0$, скажем, содержащее a_m, то мы удалим a_m. Если остающиеся $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$ удовлетворяют полиномиальному соотношению, содержащему a_{m-1}, мы удалим a_{m-1} и т. д.. В конечном счете, мы получим либо алгебраически независимый набор элементов, скажем, $a_1, a_2, \dots, a_s$, либо ровно один алгебраичный над $\Bbbk$ элемент, к примеру, a_1. Как бы то ни было, лемма из n° 3.1.5 показывает, что все прочие a_ν, а сними и всё A, алгебраичны либо над $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_s)$, либо даже над $\Bbbk$. □

3.3.5. ЛЕММА. *Если Q_A алгебраично над $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_r)$ для некоторых $a_1, a_2, \dots, a_r \in A$, то в A не существует алгебраически независимой системы из $n > r$ элементов $b_1, b_2, \dots, b_n \in A$.*

Доказательство. Удаляя часть a_ν, мы можем предположить, что $a_1, a_2, \dots, a_r$ составляют базис трансцендентности для A. Пусть $b_1, b_2, \dots, b_n \in A$ алгебраически независимы. Поскольку b_1 алгебраичен над $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_r)$, имеется полиномиальное соотношение $\varphi(b_1, a_1, a_2, \dots, a_r) = 0$, в котором присутствует как b_1, так и какой-нибудь из a_ν, допустим, a_1. Тогда Q_A алгебраично над подалгеброй, натянутой на $\{b_1, a_2, a_3, \dots, a_r\}$. В то же время, никаких полиномиальных соотношений вида $\varphi(b_1, a_2, a_3, \dots, a_r)$ нет, поскольку иначе Q_A было бы алгебраично уже над $\Bbbk(a_2, \dots, a_r)$. Таким образом, набор

$$\{b_1, a_2, a_3, \dots, a_r\}$$

тоже является базисом трансцендентности для A. По тем же причинам и все наборы

$$\{b_1, \dots, b_s, a_{s+1}, \dots, a_r\}$$

(возможно, после некоторой перенумерации элементов a_ν и b_ν) являются базисами трансцендентности для A при всех $s = 2, 3, \dots, r$. В частности, $b_{r+1}, \dots, b_n$ будут алгебраичны над $\Bbbk(b_1, \dots, b_r)$. □

3.3.6. СЛЕДСТВИЕ. *Все базисы трансцендентности имеют одинаковую мощность (она называется степенью трансцендентности алгебры A и обозначается $\mathrm{tr\,deg}\, A$).* □

3.4. Нетеровость. Любой набор элементов $f_1, f_2, \dots, f_n$ произвольного коммутативного кольца A порождает в A идеал $(f_1, f_2, \dots, f_m) = \{g_1 f_1 + g_2 f_2 + \dots + g_m f_m \mid g_\nu \in A\}$, который, как A-модуль, представляет собою A-линейную оболочку[1] элементов f_ν. Коммутативное кольцо A называется *нётеровым*, если оно удовлетворяет условиям леммы:

3.4.1. ЛЕММА. *Следующие свойства коммутативного кольца A попарно эквивалентны:*

[1]подчеркнём, что даже если набор элементов $\{f_\nu\}$ бесконечен, порождаемый ими идеал (т. е. минимальный по включению идеал, содержащий все эти элементы) по-прежнему состоит из *конечных* A-линейных комбинаций элементов f_ν

(1) *любое множество элементов f_ν содержит некоторое конечное подмножество, которое порождает тот же идеал, что и само множество;*

(2) *любой идеал допускает конечное множество образующих;*

(3) *для любой бесконечной цепочки вложенных идеалов $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $I_\nu = I_n \quad \forall \nu \geqslant n$.*

Доказательство. Ясно, что (1) $\Rightarrow$ (2). Чтобы из (2) вывести (3), возьмем конечное множество образующих для идеала $I = \bigcup I_\nu$, и т.к. все они принадлежат некоторому I_n, получим $I_\nu = I_n = I \ \forall \nu \geqslant n$. Наконец, (1) следует из (3), примененного к цепочке $I_n = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, где f_i выбираются из $\{f_\nu\}$ так, чтобы $f_\nu \notin (f_1, f_2, \dots, f_{\nu-1})$. □

3.4.2. ТЕОРЕМА. *Если A нётерово, то кольцо многочленов $A[x]$ также нётерово.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный идеал $I \subset A[x]$ и обозначим через $L_d \subset A$ множество старших коэффициентов всех многочленов степени d из I. Ясно, что и каждое отдельное L_d, и их объединение $L_\infty \overset{\text{def}}{=} \bigcup\limits_d L_d$ являются идеалами в A и, стало быть, конечно порождены. Строить конечный базис в I мы начнём с набора многочленов $f_1^{(\infty)}, f_2^{(\infty)}, \dots, f_{s_\infty}^{(\infty)} \in I$, старшие коэффициенты которых порождают идеал $L_\infty \subset A$. Пусть $\max_\nu \left(\deg f_\nu^{(\infty)}\right) = m$.

Упражнение 3.4. Покажите, что по модулю многочленов $f_1^{(\infty)}, f_2^{(\infty)}, \dots, f_{s_\infty}^{(\infty)}$ всякий $f \in I$ представляется многочленом степени строго меньшей, чем m.

Теперь для каждого $k = 1, 2, \dots, (m-1)$ обозначим через $f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \dots, f_{s_k}^{(k)}$ многочлены, старшие коэффициенты которых порождают идеал L_k. То же рассуждение, что и в упр. 3.4, показывает, что $s_0 + \cdots + s_{m-1} + s_\infty$ многочленов $f_\nu^{(\mu)}$ с $\mu = 0, 1 \ \dots, (m-1), \infty$ порождают идеал I. □

3.4.3. СЛЕДСТВИЕ. *Если A нётерово, то $A[x_1, x_2, \dots, x_n]$ тоже нётерово.* □

3.4.4. СЛЕДСТВИЕ. *Всякая конечно порожденная алгебра над полем нётерова.*

Доказательство. Полиномиальная алгебра $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, где $\Bbbk$ — поле, нётерова по предыдущему следствию. Любая ее факторалгебра A также нётерова, поскольку полный прообраз любого идеала $I \subset A$ при эпиморфизме $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \twoheadrightarrow A$ является конечнопорождённым идеалом в $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, и образы его образующих в A порождают I. □

3.5. Полиномиальные уравнения и идеалы. Любая (в том числе бесконечная) система полиномиальных уравнений $f_\nu(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ с $f_\nu \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ эквивалентна системе, левые части которой образуют идеал, порождённый исходными уравнениями. В силу нётеровости кольца многочленов такая система, в свою очередь, эквивалентна конечной системе уравнений, левые части которых порождают тот же идеал, что и исходные уравнения. Множество всех решений системы полиномиальных уравнений, левые части которых составляют идеал $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, изображается в аффинном пространстве $\mathbb{A}^n$ фигурой

$$V(J) \overset{\text{def}}{=} \{a \in \mathbb{A}_n \mid f(a) = 0 \ \ \forall f \in J\},$$

которая называется *аффинным алгебраическим многообразием* (и запросто может оказаться пустым множеством, как это происходит, к примеру, для несобственного идеала $I = (1)$).

С другой стороны, для любой фигуры $\Phi \subset \mathbb{A}^n$ множество всех многочленов, тождественно зануляющихся на Φ, образует идеал

$$I(\Phi) \overset{\text{def}}{=} \{ f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f(p) = 0 \ \ \forall p \in \Phi \}.$$

Множество нулей этого идеала $V(I(\Phi))$ представляет собою наименьшее аффинное алгебраическое многообразие, содержащее Φ. Для любого идеала $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ имеется тавтологическое включение $J \subset I(V(J))$, которое, вообще говоря, является строгим — например, для $J = (x^2) \in \mathbb{C}[x]$ имеем $V(J) = \{0\} \subset \mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ и $I(V(J)) = (x)$.

3.5.1. ТЕОРЕМА ГИЛЬБЕРТА О НУЛЯХ (NULLSTELLENSATZ). *Над произвольным алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ для любого идеала $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ справедливы следующие утверждения*

(1) *слабая теорема о нулях:* $V(J) = \varnothing \iff 1 \in J$;

(2) *сильная теорема о нулях:* $f \in I(V(J)) \iff f^m \in J$ *для некоторого* $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Чтобы доказать (1), достаточно для каждого собственного идеала $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ найти точку $p \in \mathbb{A}_n$, в которой зануляются все многочлены из J. При этом без ограничения общности можно считать, что любой многочлен $g \notin J$ обратим по модулю J. Действительно, необратимость $g \notin J$ по модулю J означает неразрешимость уравнения $gh + f = 1$ относительно $h \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ и $f \in J$, т. е. собственность идеала (g, J), порождённого g и J. Заменяя J на (g, J), мы лишь усложняем себе задачу, и после конечного числа таких замен мы получим максимальный собственный идеал J, для которого $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/J$ является полем. Поскольку это поле конечно порождено как $\Bbbk$-алгебра, оно является алгебраическим расширением поля $\Bbbk$ конечной степени (см. n° 3.3.1 – n° 3.3.2), и поскольку $\Bbbk$ алгебраически замкнто, мы приходим к равенству $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/J = \Bbbk$, которое означает, что любой многочлен $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ сравним с константой по модулю J. Искомая точка $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ имеет в качестве координат константы $p_i \equiv x_i \pmod J$.

В (2) нетривиальна только импликация «$\Rightarrow$» для непустого многообразия $V(J) \subset \mathbb{A}^n$. Чтобы доказать ее, мы вложим $\mathbb{A}^n$ в большее пространство $\mathbb{A}^{n+1}$ с координатами $(t,\, x_1, x_2, \dots, x_n)$ в качестве гиперплоскости $t = 0$. Если $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \subset \Bbbk[t,\, x_1, x_2, \dots, x_n]$ тождественно обращается в нуль на $V(J)$, то идеал $J' \subset \Bbbk[t,\, x_1, x_2, \dots, x_n]$, порожденный J и многочленом $g(t, x) = 1 - t\,f(x)$, имеет пустое множество нулей в $\mathbb{A}^{n+1}$, поскольку $g(x, t) \equiv 1$ вдоль цилиндра $V(J) \subset \mathbb{A}^{n+1}$. По слабой теореме о нулях, $1 \in J'$, т. е. существуют $q_0, q_1, \dots, q_s \in \Bbbk[t,\, x_1, x_2, \dots, x_n]$ и $f_1, f_2, \dots, f_s \in J$, такие что

$$q_0(x,t)(1 - tf(x)) + q_1(t,x)f_1(x) + \dots + q_s(x,t)f_s(x) = 1 \,.$$

Гомоморфизм $\Bbbk[t,\, x_1, x_2, \dots, x_n] \longrightarrow k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, переводящий $t \longmapsto 1/f(x)$, $x_\nu \longmapsto x_\nu$, отображает это равенство в равенство $q_1(1/f(x)\,,\, x)\, f_1(x) + \dots + q_s(1/f(x)\,,\, x)\, f_s(x) = 1$ в поле рациональных функций $\Bbbk(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Поскольку идеал J не содержит 1, некоторые из $q_\nu(1/f(x), x)$ должны иметь ненулевые знаменатели, каковые являются степенями f. Поэтому, умножение на подходящую степень f^m ведет к искомому выражению $\widetilde{q}_1(x)\, f_1(x) + \dots + \widetilde{q}_s(x)\, f_s(x) = f^k(x)$ с $\widetilde{q}_\nu \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$. □

3.5.2. Пример: одноточечные множества. Аффинное алгебраическое многообразие $V(J) \subset \mathbb{A}(V)$ тогда и только тогда состоит из единственной точки — начала координат $\{O\} \in \mathbb{A}(V)$, когда $J \supset S^d V^*$ для всех $d \gg 0$ и $1 \notin I$, или (что то же самое) когда $0 < \dim \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/J < \infty$. Действительно, если J содержит некоторые степени $x_i^{m_i}$ всех координатных функций, то $V(J) = \{O\}$. Наоборот, если $V(J) = \{0\}$, то все x_i зануляются на $V(J)$ и по сильной теореме о нулях $x_i^{m_i} \in J$ для некоторых $m_i \in \mathbb{N}$. Тогда $S^d V^* \subset I$ для $d \geqslant 1 + \sum (m_\nu - 1)$.

Упражнение 3.5. Докажите, что идеал $I(\{O\})$ максимален и порождается $x_1, x_2, \dots, x_n$.

3.6. Как «практически» выяснить, лежит ли f в $(f_1, f_2, \dots, f_m)$. Зафиксируем на множестве всех мономов[1] в $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ какое-нибудь линейное упорядочение, согласованное с умножением[2], и будем обозначать через f^L старший моном многочлена f относительно этого порядка. Старшие мономы всех многочленов из заданного идеала I порождают идеал I^L, который называется идеалом *главных частей* идеала I.

Упражнение 3.6. Убедитесь, что идеал I^L *мономиальный* (т. е. содержит вместе с каждым многочленом и все его мономы), а также что $(f_1, f_2, \dots, f_s)^L \supset (f_1^L, f_2^L, \dots, f_s^L)$ и приведите пример, в котором это включение строгое.

Система образующих $(f_1, f_2, \dots, f_s)$ данного идеала I называется его *базисом Грёбнера*[3], если $I^L = (f_1^L, f_2^L, \dots, f_s^L)$. Так, базис идеала $I \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, который получается индуктивным

[1]его удобно представлять себе в виде точек первого координатного гипероктанта целочисленной решётки $\mathbb{Z}^n$, узлы которой суть показатели мономов

[2]т. е. удовлетворяющее условию $m_1 > m_2 \iff m_1 \cdot m > m_2 \cdot m$ для любых мономов m, m_1, m_2 (если мы используем «решёточное» представление для мономов, то удобнее использовать аддитивную запись)

[3]«базисы Грёбнера», равно как и вся описываемая здесь технология, были известны ещё в 50-е годы, причём сразу в контексте некоммутативных тензорных алгебр (см. например, работы Ширшова об идеалах в универсальных обёртывающих алгебрах свободных алгебр Ли); соответствующая коммутативная теория в те годы была не слишком интересна, с одной стороны, в силу своей тривиальности, с другой — в виду непосильной (для «ручной» работы) трудоёмкости практических вычислений; лишь спустя 10 – 15 лет, с внедрением компьютеров, эта техника приобрела широкую популярность (благодаря работам Бухбергера) и является ныне главным вычислительным средством «компьютерной алгебы»

применением (неконструктивного) рассуждения из леммы n° 3.4.2, будет именно базисом Грёбнера. Если идеал I задан базисом Грёбнера, то вопрос о принадлежности данного многочлена h этому идеалу решается очень просто.

Упражнение 3.7. Пусть $(f_1, f_2, \dots, f_s)^L = (f_1^L, f_2^L, \dots, f_s^L)$. Докажите, что классы всех мономов по модулю мономов, лежащих в идеале[1] $(f_1^L, f_2^L, \dots, f_s^L)$, составляют базис векторного пространства

$$\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/(f_1, f_2, \dots, f_s)$$

над полем $\Bbbk$.

С другой стороны, произвольную систему образующих можно *конструктивно* расширить до базиса Грёбнера. Для этого для каждой пары образующих многочленов f_i, f_j, таких что их старшие члены имеют вид $a_i\, m_i \cdot m$, $a_j\, m \cdot m_j$ для некоторых ненулевых констант $a_i, a_j \in \Bbbk$ и неединичных мономов m, m_i, m_j с $\text{нод}(m_i, m_j) = 1$, надо добавить к конструируемому базису многочлен $S(f_i, f_j) = (a_i\, m_i) \cdot f_j - f_i \cdot (a_j\, m_j)$, называемый S-многочленом (а в некоммутативном случае — *скобкой Ширшова*) пары (f_i, f_j).

Упражнение 3.8. Убедитесь, что система образующих идеала тогда и только тогда, когда является базисом Грёбнера, когда вместе с каждой парой многочленов она содержит и их скобку Ширшова, и покажите, что произвольная система образующих данного идеала может быть дополнена до базиса Грёбнера присоединением конечного числа недостающих скобок Ширшова.

3.7. Системы результантов. Напомним, что мы обозначаем через $\mathscr{S}_d = \mathbb{P}\left(S^d V^*\right)$ пространство гиперповерхностей степени d в $\mathbb{P}(V)$. Зафиксируем набор из $m \geqslant 2$ степеней $d_1, d_2, \dots, d_m$, и рассмотрим в прямом произведении пространств гиперповерхностей множество

$$\mathscr{R} \subset \mathscr{S}_{d_1} \times \mathscr{S}_{d_2} \times \cdots \times \mathscr{S}_{d_m} ,$$

образованное всеми наборами из m гиперповерхностей $S_1, S_2, \dots, S_m \subset \mathbb{P}_n$, имеющих непустое пересечение $\bigcap S_\nu \neq \varnothing$. Покажем, что $\mathscr{R}$ является алгебраическим многообразием, т. е. описывается конечной системой мультиоднородных полиномиальных уравнений на коэффициенты форм $(f_1, f_2, \dots, f_m) \in S^{d_1}V^* \times S^{d_1}V^* \times \cdots \times S^{d_m}V^*$, задающих гиперповерхности $S_1, S_2, \dots, S_m$.

Пусть $I \subset \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ — идеал, порожденный формами f_ν. Условие $\bigcap S_\nu = \varnothing$ в $\mathbb{P}(V)$ означает, что аффинное многообразие $V(I) \subset \mathbb{A}(V)$ либо пусто, либо совпадает с началом координат. Как мы видели в n° 3.5.2, это равносильно тому, что $S^dV^* \subset I \;\forall\, d \gg 0$, что, в свою очередь, означает сюрьективность при всех $\forall\, d \gg 0$ $\Bbbk$-линейного отображения

$$\mu_d \;:\; S^{d-d_1}V^* \oplus S^{d-d_2}V^* \oplus \cdots \oplus S^{d-d_m}V^* \xrightarrow{(g_0, g_1, \dots, g_n) \mapsto \sum g_\nu f_\nu} S^d \tag{3-2}$$

В стандартных мономиальных базисах μ_d представляется матрицей, элементы которой суть линейные формы от коэффициентов многочленов f_ν. При $d \gg 0$ размерность левой части (3-2) (ведущая себя как $\sum\limits_{\nu=1}^{m} \binom{n+d-d_\nu}{n} \sim \frac{m}{n!}\, d^n$) становится больше, чем размерность правой (ведущей себя как $\binom{n+d}{n} \sim \frac{1}{n!}\, d^n$). Поэтому несюрьективность отображения (3-2) равносильна тому, что ранг этой матрицы не максимален, т. е. все её старшие миноры зануляются. Итак, $\mathscr{R}$ задаётся бесконечной системой системой полиномиальных уравнений, в которой приравнены к нулю все максимальных миноры всех матриц μ_d с $d \gg 0$. Как мы знаем, эта бесконечная система уравнений должна быть эквивалентна некоторой конечной подсистеме. Такая конечная система соотношений на коэффициенты форм, выполнение которой равносильно непустоте задаваемого этими формами проективного многообразия, называется *системой результантов*. Она зависит от m, n, $d_1, d_2, \dots, d_m$ и её явное отыскание в общем случае является делом деликатным[2].

[1]в «решёточной» интерпретации мономы, лежащие в идеале $(f_1^L, f_2^L, \dots, f_s^L)$ — это неотрицательные целочисленные линейные комбинации мономов $f_1^L, f_2^L, \dots, f_s^L$

[2]описанию различных подходов к решению этой задачи посвящена книга *I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A.V. Zelevinsky. Discriminants, resultants, and multidimensional determinants.* [Springer, 1994], в которой среди прочего описаны все случаи, когда результантное множество можно задать одним уравнением

Пусть, например, $n = 1$ и $m = 2$, т. е. мы имеем пару бинарных форм от $t = (t_0 : t_1)$

$$\begin{aligned} A(t) &= a_0\, t_1^r + a_1\, t_0\, t_1^{r-1} + a_2\, t_0^2\, t_1^{r-2} + \cdots + a_{r-1}\, t_0^{r-1}\, t_1 + a_r\, t_0^r \\ B(t) &= b_0\, t_1^s + b_1\, t_0\, t_1^{s-1} + b_2\, t_0^2\, t_1^{s-2} + \cdots + b_{s-1}\, t_0^{s-1}\, t_1 + b_s\, t_0^s \end{aligned} \tag{3-3}$$

(или, если угодно, пару многочленов от одной переменной $x/1 = t_0/t_1$). При $d = r + s - 1$ размерность левой части (3-2) оказывается равна размерности правой[1], отображение μ_d принимает вид

$$S^{r-1}U \oplus S^{s-1}V^* \xrightarrow{(h_1(t),h_2(t))\mapsto A(t)h_1(t)+B(t)h_2(t)} S^{r+s-1}V^*\,, \tag{3-4}$$

и задаётся в стандартных мономиальных базисах квадратной матрицей, транспонированной к матрице

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_r & & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_r & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & \dots & a_r \\ b_0 & b_1 & \dots & b_s & & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & b_s & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & \dots & b_s \end{pmatrix}}_{s+r} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} s \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} r \end{array} \tag{3-5}$$

определитель которой называется *детерминантом Сильвестра*. Покажем, что он порождает результантный идеал. Для этого рассмотрим кольцо многочленов $k[\alpha', \alpha'', \beta', \beta'']$ от четырех наборов переменных

$$\alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n)\,,\ \alpha'' = (\alpha''_1, \alpha''_2, \dots, \alpha''_n)\,, \quad \beta' = (\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_m)\,,\ \beta'' = (\beta''_1, \beta''_2, \dots, \beta''_m)\,,$$

таких что $A(t) = \prod\limits_{i=0}^{r} (\alpha'_i t_1 - \alpha''_i t_0)$, $B(t) = \prod\limits_{i=0}^{s} (\beta'_i t_1 - \beta''_i t_0)$. Произведение

$$R_{AB} \overset{\text{def}}{=} \prod_{i,j} \left(\alpha'_i \beta''_j - \alpha''_i \beta'_j\right) = \prod_{i=1}^{r} B(\alpha_i) = (-1)^{rs} \prod_{j=1}^{s} A(\beta_j)\,,$$

называется *результантом* пары бинарных форм (3-3). Результант однороден степени rs по каждому из двух наборов переменных (α, β) и обращается в нуль тогда и только тогда, когда A и B имеют нетривиальный общий делитель, что равносильно наличию общего нуля на $\mathbb{P}_1$. Определитель Сильвестра совпадает с результантом[2] с точностью до постоянного множителя. В самом деле, если точка (α, β) лежит на квадрике $\alpha'_i\beta''_j - \alpha''_i\beta'_j = 0$, то $(\alpha'_i t_1 - \alpha''_i t_0) = (\beta'_i t_1 - \beta''_i t_0)$ с точностью до скалярного множителя, и эта линейная форма делит $A(t)$, $B(t)$, и любой многочлен вида $A(t)h_1(t) + B(t)h_2(t)$. Стало быть, отображение (3-4) не эпиморфно и имеет нулевой определитель. Таким образом, определитель Сильвестра тождественно зануляется на каждой квадрике $\alpha'_i\beta''_j - \alpha''_i\beta'_j = 0$, и значит, делится на $R_{A,B}$. Так как определитель Сильвестра имеет ту же бистепень (rs, rs) по (α, β), частное должно быть константой.

Упражнение 3.9. Найдите её (например, сравнивая коэффициенты при старших мономах).

Всюду далее до конца этого параграфа мы предполагаем, что основное поле $\Bbbk$ является алгебраически замкнутым.

[1] и она меньше при меньших d и больше при бóльших

[2] в частности, доставляет «явное» разложение результанта в виде многочлена от «однородных» элементарных симметрических функций $a_i(\alpha)$, $b_j(\beta)$

3.8. Аффинные алгебраические многообразия. Как мы уже упоминали в n° 3.5, *аффинным алгебраическим многообразием* называется подмножество $X \subset \mathbb{A}^n$, которое задаётся системой полиномиальных уравнений $f_\nu(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. При этом без ограничения общности можно считать, что система уравнений образует конечно порождённый идеал $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, и в этом случае мы пишем $X = V(J)$. Аффинные алгебраические многообразия образуют категорию $\mathscr{Aff}_\Bbbk$, морфизмами в которой являются теоретико множественные отображения

$$\mathbb{A}^n \supset X \xrightarrow{\varphi} Y \subset \mathbb{A}^m , \tag{3-6}$$

задаваемые полиномиальными функциями, т.е. переводящие точку $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ в точку $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in Y$, координаты которой $y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ суть некоторые многочлены $\varphi_i \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Такие отображения называются *регулярными*. Мы собираемся показать, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ категория $\mathscr{Aff}_\Bbbk$ антиэквивалентна категории $\mathscr{Alg}_\Bbbk$ конечно порождённых приведённых[1] $\Bbbk$-алгебр с единицей (и гомоморфизмов, переводящих единицу в единицу). Квазиобратные друг другу антиэквивалентности между $\mathscr{Aff}_\Bbbk$ и $\mathscr{Alg}_\Bbbk$ задаются представимыми контравариантными функторами

$$X \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{Aff}_\Bbbk}(X, \mathbb{A}^1) , \tag{3-7}$$

$$A \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{Alg}_\Bbbk}(A, \Bbbk) , \tag{3-8}$$

где объект $\mathbb{A}^1 = \Bbbk$ в первом случае рассматривается как многообразие (аффинная прямая), а во втором — как $\Bbbk$-алгебра. То обстоятельство, что объект $\mathbb{A}^1 = \Bbbk$ несёт на себе сразу обе структуры — и алгебраического многообразия над $\Bbbk$, и $\Bbbk$-алгебры — позволяет наделить множество $\mathrm{Hom}_{\mathscr{Aff}_\Bbbk}(X, \mathbb{A}^1)$ из (3-7) (канонической) структурой $\Bbbk$-алгебры, а множество $\mathrm{Hom}_{\mathscr{Alg}_\Bbbk}(A, \Bbbk)$ из (3-8) — (неканонической) структурой алгебраического многообразия.

3.8.1. Координатная алгебра. Регулярные отображения из данного аффинного многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ в аффинную прямую $\mathbb{A}^1 \simeq \Bbbk$ или, что то же самое, полиномиальные функции на $X \xrightarrow{f} \Bbbk$ образуют конечно порождённую коммутативную приведённую $\Bbbk$-подалгебру в алгебре $\Bbbk^X$ всех $\Bbbk$-значных функций на X. Эта подалгебра называется *координатной алгеброй* (или *алгеброй регулярных функций*) аффинного алгебраического многообразия X и обозначается $\Bbbk[X]$. Она получается факторизацией кольца полиномов $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ по идеалу $I(X) \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, состоящему из всех полиномов, тождественно зануляющихся на X:

$$\Bbbk[X] \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathscr{Aff}_\Bbbk}(X, \Bbbk) \simeq \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X) .$$

3.8.2. ЛЕММА. *Всякая конечно порожденная приведённая алгебра A над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ является координатной алгеброй $A = \Bbbk[X]$ некоторого аффинного алгебраического многообразия X.*

Доказательство. Зададим алгебру A образующими и соотношениями, т.е. представим её в виде фактор алгебры $A = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$. Приведённость алгебры A означает, что (для любого $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$) $f^n \in I \Rightarrow f \in I$. Иными словами, идеал соотношений I радикален: $I = \sqrt{I}$ и, по сильной теореме о нулях, $I = I(V(I))$ является идеалом аффинного алгебраического многообразия $X = V(I) \subset \mathbb{A}^n$. □

3.8.3. Максимальный спектр. С каждой точкой $p \in X$ аффинного алгебраического многообразия X связан *гомоморфизм вычисления*

$$\mathrm{ev}_p : \Bbbk[X] \xrightarrow{f \mapsto f(p)} \Bbbk .$$

Он эпиморфен (поскольку переводит единицу в единицу) и, стало быть, представляет собой факторицацию

$$\mathrm{ev}_p : \Bbbk[X] \xrightarrow{f \mapsto f \pmod{\mathfrak{m}_p}} \frac{\Bbbk[X]}{\mathfrak{m}_p} = \Bbbk$$

[1]коммутативное кольцо A называется *приведенным*, если в нём нет нильпотентов, т.е. $a^n = 0 \Rightarrow a = 0$

по своему ядру $\mathfrak{m}_p \stackrel{\text{def}}{=} \ker \mathrm{ev}_p = I(\{p\}) = \{f \in \Bbbk[X] \mid f(p) = 0\}$, которое является максимальным идеалом в $\Bbbk[X]$ и называется *максимальным идеалом точки* $p \in X$. Множество всех максимальных идеалов данной $\Bbbk$-алгебры A называется *максимальным спектром* и обозначается $\operatorname{Spec_m}(A)$. Каждой точке спектра $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec_m} A$ отвечает гомоморфизм вычисления

$$\mathrm{ev}_{\mathfrak{m}} : A \xrightarrow{a \mapsto a \,(\mathrm{mod}\ \mathfrak{m})} A/\mathfrak{m}\ ,$$

принимающий значения в поле $A/\mathfrak{m} \supset \Bbbk$, которое конечно порождено как $\Bbbk$-алгебра. Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ это влечёт за собой равенство $A/\mathfrak{m} = \Bbbk$ (см. n° 3.3.1 – n° 3.3.2), что позволяет интерпретировать элементы алгебры A как функции на $\operatorname{Spec_m} A$ со значениями в поле $\Bbbk$.

3.8.4. ЛЕММА. *Для любого аффинного алгебраического многообразия X над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ соответствия $p \longleftrightarrow \mathrm{ev}_p \longleftrightarrow \mathfrak{m}_p = \ker(\mathrm{ev}_p)$ устанавливают биекции между точками многообразия X, гомоморфизмами $\Bbbk[X] \longrightarrow \Bbbk$, тождественными на $\Bbbk$, и максимальными идеалами алгебры $\Bbbk[X]$.*

Доказательство. Биективность второго соответствия мы уже проверили выше[1]. Сопоставление точке $p \in X \subset \mathbb{A}^n$ её максимального идеала $\mathfrak{m}_p = \ker \mathrm{ev}_p = I(\{p\})$ вкладывает множество точек в множество максимальных идеалов, поскольку для $p \neq q$ всегда (в том числе, над не замкнутым полем) можно указать аффинно линейную функция $\mathbb{A}^n \xrightarrow{f} \Bbbk$ зануляющуюся в p и отличную от нуля в q. Чтобы показать, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ любой максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$ имеет вид $\mathfrak{m}_p = \ker \mathrm{ev}_p$ для некоторой точки $p \in X$, рассмотрим полный прообраз $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ идеала $\mathfrak{m}$. Поскольку $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/\widetilde{\mathfrak{m}} = \Bbbk[X]/\mathfrak{m} = \Bbbk$, идеал $\widetilde{\mathfrak{m}}$ является собственным, максимальным и содержит $I(X)$. По слабой теореме о нулях $V(\widetilde{\mathfrak{m}}) \neq \varnothing$, т. е. $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}_p$ для некоторой точки $p \in \mathbb{A}^n$, причём $p \in X$ (поскольку $I(X) \subset \widetilde{\mathfrak{m}}$), а значит $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p$ (поскольку $\mathfrak{m}$ максимален). □

3.8.5. Гомоморфизмы поднятия. Предыдущие две леммы показывают, что любая приведённая $\Bbbk$-алгебра A имеет вид $\operatorname{Hom}_{\mathscr{Aff}_{\Bbbk}}(X, \Bbbk)$ для некоторого аффинного алгебраического многообразия X, причём при применении к такой алгебре функтора $\operatorname{Hom}_{\mathscr{Alg}_{\Bbbk}}(\,*\,, \Bbbk)$ мы получаем в точности множество точек многообразия X.

Покажем, что функтор (3-7) является *вполне строгим*, т. е. устанавливает биекцию между регулярными морфизмами алгебраических многообразий и гомоморфизмами их координатных алгебр. Для этого напомним, что со всяким отображением множеств $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2$ связан *гомоморфизм поднятия* из алгебры $\Bbbk^{M_2}$ всех $\Bbbk$-значных функций на M_2 в алгебру $\Bbbk^{M_1}$ всех $\Bbbk$-значных функций на M_1:

$$\varphi^* : \Bbbk^{M_2} \xrightarrow{f \mapsto f \circ \varphi} \Bbbk^{M_1}\ , \tag{3-9}$$

переводящий функцию $M_2 \xrightarrow{f} \Bbbk$ в композицию $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{f} \Bbbk$. Гомоморфизм поднятия, отвечающий регулярному морфизму алгебраических многообразий

$$\mathbb{A}^n \supset X \xrightarrow{\varphi} Y \subset \mathbb{A}^m\ ,$$

переводит регулярные функции на Y в регулярные функции на X, т. е. корректно определяет гомоморфизм алгебр $\Bbbk[Y] \xrightarrow{\varphi^*} \Bbbk[X]$. В самом деле, если точка $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ переходит в точку $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in Y$, координаты которой $y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ суть многочлены $\varphi_i \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, то $\varphi^*(y_i) = \varphi_i \,(\mathrm{mod}\ I(X)) \in \Bbbk[X]$.

[1] отметим, что сопоставление $\varphi \mapsto \ker \varphi$ и над *произвольным* (не обязательно алгебраически замкнутым) полем $\Bbbk$ вкладывает множество гомоморфизмов $A \xrightarrow{\varphi} \Bbbk$, тождественных на $\Bbbk$, в множество максимальных идеалов алгебры A; однако, над незамкнутым полем *не все* максимальные идеалы в A являются ядрами гомоморфизмов вычисления со значениями в поле $\Bbbk$; например, ядро гомоморфизма вычисления $\mathrm{ev}_{\sqrt{-1}} : \mathbb{R}[x] \xrightarrow{f \mapsto f(\sqrt{-1})} \mathbb{C}$ является максимальным идеалом $\mathbb{R}$-алгебры $\mathbb{R}[x]$, но его нельзя реализовать как ядро вычисления $\mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$, поскольку $\operatorname{codim}_{\mathbb{R}} \ker \mathrm{ev}_{\sqrt{-1}} = 2$

Упражнение 3.10. Проверьте, что теоретико множественное отображение топологических пространств (соотв. гладких многообразий) $X \longrightarrow Y$ является непрерывным (соотв. гладким) тогда и только тогда, когда его гомоморфизм поднятия переводит алгебру непрерывных функций $C^0(Y)$ в алгебру непрерывных функций $C^0(X)$ (соотв. алгебру гладких функций $C^\infty(Y)$ в алгебру гладких функций $C^\infty(X)$).

Наоборот, всякому гомоморфизму алгебр $\Bbbk[Y] \xrightarrow{\psi} \Bbbk[X]$ отвечает морфизм поднятия

$$X = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X] \xrightarrow{\psi^*} \operatorname{Spec_m} \Bbbk[Y] = Y \ ,$$

который сопоставляет гомоморфизму вычисления $\Bbbk[X] \xrightarrow{\mathrm{ev}} \Bbbk$ с ядром $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X]$ гомоморфизм вычисления $\Bbbk[Y] \xrightarrow{\psi} \Bbbk[X] \xrightarrow{\mathrm{ev}} \Bbbk$ с ядром $\psi^*\mathfrak{m} == \psi^{-1}(\mathfrak{m}) \in \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X]$.

Упражнение 3.11. Убедитесь, что соответствия $\operatorname{Hom}_{\mathscr{Aff}_\Bbbk}(X,Y) \xleftrightarrow{\varphi \leftrightarrow \varphi^*} \operatorname{Hom}_{\mathscr{Alg}_\Bbbk}(\Bbbk[Y],\Bbbk[X])$ являются взаимно обратными биекциями (т. е. что $\varphi^{**} = \varphi$).

Итак, функтор (3-7), сопоставляющий аффинному алгебраическому многообразию его координатную алгебру, одновременно устанавливает биекцию между регулярными морфизмами алгебраических многообразий и (идущими в противоположном направлении) гомоморфизмами отвечающих им координатных алгебр. В этом случае говорят, что категории аффинных алгебраических многообразий и приведённых $\Bbbk$-алгебр *антиэквивалентны*. При этой эквивалентности поле $\Bbbk$, рассматриваемое как алгебра, отвечает одноточечному многообразию $* = \operatorname{Spec_m} \Bbbk$, т. е. $\Bbbk = \Bbbk[*]$. В частности, любой гомоморфизм вычисления $\Bbbk[X] \xrightarrow{\mathrm{ev}_p} \Bbbk$ можно воспринимать как гомоморфизм поднятия, отвечающий регулярному отображению $* \xrightarrow{\mathrm{ev}_p^*} X$, образом которого является точка p, и из упр. 3.11 мы ещё раз получаем равенство $\operatorname{Spec_m} X = \operatorname{Hom}_{\mathscr{Aff}_\Bbbk}(\,*\,, X) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{Alg}_\Bbbk}(\Bbbk[X], \Bbbk)$.

Подчеркнём, что на множестве $\operatorname{Spec_m}(A)$ имеется много *разных* (но изоморфных) структур аффинного алгебраического многообразия, если понимать под таковой структурой вложение $\operatorname{Spec_m}(A) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{A}^n$, образом которого является аффинное многообразие X, а гомоморфизм поднятия $\Bbbk[X] \xrightarrow[\sim]{} A$ отождествляет координатную алгебру $\Bbbk[X]$ с алгеброй A. Выбор такой структуры равносилен выбору конкретного способа задания алгебры A образующими и соотношениями, т. е. фиксации изоморфизма $A \simeq \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$. В частности, для того чтобы превратить (3-8) в функтор, принимающий значения в категории аффинных алгебраических многообразий, а не в категории множеств, мы должны зафиксировать для каждой алгебры A одно из таких представлений и наделить $\operatorname{Spec_m} A$ структурой многообразия, индуцированной биекцией $\operatorname{Spec_m} A \simeq V(I) \subset \mathbb{A}^n$.

3.8.6. Пример: прямая и гипербола. Точки спектра $\operatorname{Spec_m} \Bbbk[t]$ биективно соответствуют точкам аффинной прямой $\mathbb{A}^1 = \Bbbk$, поскольку всякий гомоморфизм вычисления $\Bbbk[t] \xrightarrow{\mathrm{ev}} \Bbbk$ однозначно определяется заданием образа $\mathrm{ev}(t) = \lambda \in \Bbbk$ (а всякий максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[t]$ — это главный идеал вида $((t-\lambda)))$. Аналогично, спектр алгебры полиномов Лорана $\operatorname{Spec_m} \Bbbk[t, t^{-1}]$ отождествляется с дополнением до нуля $\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{0\} = \Bbbk^*$, поскольку $\lambda = \mathrm{ev}(t) = 1/(\mathrm{ev}(t^{-1})$ теперь должно быть обратимым элементом поля $\Bbbk$. С другой стороны, задавая алгебру полиномов Лорана образующими и соотношениями посредством изоморфизма

$$\varphi : \frac{\Bbbk[x,y]}{(xy-1)} \xrightarrow[\sim]{(x,y)\mapsto(t,t^{-1})} \Bbbk[t,t^{-1}]$$

мы реализуем это же многообразие в виде гиперболы $xy = 1$ в $\mathbb{A}^2$.

3.8.7. Отступление: геометрические схемы. Максимальный спектр $\operatorname{Spec_m} A$ определён для любой, в том числе не обязательно приведённой $\Bbbk$-алгебры A. При этом каждый элемент $a \in A$ можно интерпретировать как функцию на $\operatorname{Spec_m} A$, значение которой в точке $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec_m} A$ равно $a \pmod{\mathfrak{m}} \in A/\mathfrak{m} = \Bbbk$ (над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$), что задаёт гомоморфизм $A \longrightarrow \Bbbk^{\operatorname{Spec_m} A}$ из алгебры A в алгебру $\Bbbk$-значных функций на спектре. Поскольку в $\Bbbk$ нет нильпотентов, все нильпотентны алгебры A при этом гомоморфизме переходят в тождественно нулевые функции.

Так как равенства $a^n = b^m = 0$ влекут равенство $(a-b)^{m+n-1} = 0$, множество нильпотентных элементов алгебры A образует идеал

$$\mathfrak{n}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \exists\, n \in \mathbb{N} : a^n = 0\}\ , \tag{3-10}$$

который называется ***нильрадикалом*** алгебры A. Предыдущее рассуждение показывает, что нильрадикал $\mathfrak{n}(A)$ содержится в пересечении всех максимальных идеалов алгебры A и $\operatorname{Spec}_m A = \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A_{\mathrm{red}}$, где редуцированная алгебра

$$A_{\mathrm{red}} \stackrel{\text{def}}{=} A/\mathfrak{n}(A)\ .$$

Если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то пересечение всех максимальных идеалов в A_{red} нулевое, ибо оно состоит из функций, тождественно обращающихся в нуль на аффинном алгебраическом многообразии $X = \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A_{\mathrm{red}}$. Таким образом, пересечение всех максимальных идеалов в A совпадает в этом случае с $\mathfrak{n}(A)$.

Упражнение 3.12*. Покажите, что нильрадикал произвольного коммутативного кольца совпадает с пересечением всех простых идеалов этого кольца.

Пара $(A, \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A)$, где A — произвольная (не обязательно приведённая) конечно порожденная алгебра над алгебраически замкнутым полем, называется *аффинной геометрической схемой*. Интуитивно, геометрическая схема — это аффинное алгебраическое множество $X = \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A_{\mathrm{red}}$, кольцо регулярных функций которого расширено при помощи идеала нильпотентов, которые кодируют те или иные «инфинитезимальные» геометрические характеристики X.

3.8.8. Пример: пересечение аффинных алгебраических множеств $X, Y \subset \mathbb{A}^n$ определяется как

$$X \cap Y \stackrel{\text{def}}{=} V(I(X) + J(X))\ ,$$

т. е. как многообразие, заданное объединением всех уравнений, задающих X и Y. Если пересечение не трансверсально, фактор алгебра $A = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/(I(X) + J(X))$ не является приведённой. Например, если $X, Y \subset \mathbb{A}^2$ заданы уравнениями $y - x^2 = 0$ и $y = 0$, то $A = \Bbbk[x, y]/(y - x^2, y) \simeq \Bbbk[x]/(x^2)$ не приведена, а само пересечение в этом случае естественно считать *двойной* точкой $x = y = 0$ (теоретико множественно совпадающей со $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A_{\mathrm{red}}$). В общем случае, пересечение $X \cap Y$ как множество тоже исчерпывается точками аффинного алгебраического многообразия $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A_{\mathrm{red}}$, но заменяя пару $(A, \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A)$ на $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$ мы можем потерять важную информацию о характере пересечения. В частности, если мы хотим развить, скажем, теорию *кратностей пересечений*, мы должны рассматривать пересечения именно как *схемы*, а не только как алгебраические многообразия.

3.9. Прямые произведения. Напомним, что в категории $\mathcal{A}lg_{\Bbbk}$ имеется *копроизведение*, т. е. для любых двух $\Bbbk$-алгебр A, B существует $\Bbbk$-алгебра $A \otimes B$ с парой гомоморфизмов

$$A \xrightarrow{\ \alpha\ } A \otimes B \xleftarrow{\ \beta\ } B\ , \tag{3-11}$$

которые универсальны[1] в том смысле, что для любой пары гомоморфизмов

$$A \xrightarrow{\ \varphi\ } C \xleftarrow{\ \psi\ } B$$

существует единственный гомоморфизм $A \otimes B \xrightarrow{\ \varphi\otimes\psi\ } C$ со свойствами

$$\varphi = (\varphi \otimes \psi)\circ\alpha \quad , \qquad \psi = (\varphi \otimes \psi)\circ\beta\ .$$

Как векторное пространство над $\Bbbk$, алгебра $A \otimes B$ является тензорным произведением векторных пространств[2] A и B (например, $\Bbbk[x] \otimes \Bbbk[y] \simeq \Bbbk[x, y]$), умножение задаётся формулой

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)\ ,$$

[1] и однозначно определяются этой универсальностью

[2] хотя конечно порожденные $\Bbbk$-алгебры могут быть *бесконечномерны* как векторные пространства, они всегда обладают не более чем счётным базисом (т. е. образованы всевозможными *конечными* линейными комбинациями $\sum \lambda_\nu e_\nu$ каких-то элементов из не более чем счётного набора базисных векторов e_i); большинство конструкций мультилинейной алгебры второго семестра дословно переносится на такие пространства; так, $A \otimes B$ состоит из всевозможных *конечных* сумм $\sum a_\nu \otimes b_\nu$ с $a_\nu \in A$, $b_\nu \in B$ и однозначно (с точностью до канонического изоморфизма) определяется стандартным универсальным свойством тензорного произведения векторных пространств

а универсальные гомоморфизмы (3-11) действуют по правилам

$$A \xrightarrow{\alpha\,:\,a\mapsto a\otimes 1} A\otimes B \xleftarrow{\beta\,:\,b\mapsto 1\otimes b} B$$

Упражнение 3.13. Пользуясь универсальностью тензорного произведения векторных пространств, проверьте выполнение в $A\otimes B$ всех аксиом коммутативной $\Bbbk$-алгебры и универсального свойства копроизведения алгебр.

При антиэквивалентности (3-7) копроизведение алгебр переходит в прямое произведение аффинных алгебраических многообразий, согласованное с их теоретико-множественным прямым произведением.

3.9.1. ЛЕММА. *Тензорное произведение $A\otimes B$ любых двух конечно порождённых приведённых $\Bbbk$-алгебр является конечно порождённой приведённой $\Bbbk$-алгеброй, максимальный спектр которой является теоретико множественным прямым произведением максимальных спектров сомножителей:* $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A\otimes B)=\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A)\times\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(B)$.

Доказательство. Биекция множеств $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A)\times\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(B)\simeq\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A\otimes B)$ переводит любую точку (p,q), представленную парой эпиморфизмов вычисления $A\xrightarrow{\mathrm{ev}_p}\Bbbk$, $B\xrightarrow{\mathrm{ev}_q}\Bbbk$, в эпиморфизм вычисления $A\otimes B\longrightarrow\Bbbk$, предписываемый универсальным свойством тензорного произведения. Алгебра $A\otimes B$ порождается над $\Bbbk$ всевозможными попарными тензорными произведениями образующих алгебр A и B, коих имеется конечное число. Чтобы показать, что $A\otimes B$ приведена, достаточно убедиться в том, что всякий элемент $h\in A\otimes B$, задающий нулевую функцию на $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A\otimes B)$, равен нулю. Для этого запишем такой элемент h в виде $\sum f_\nu\otimes g_\nu$ с линейно независимыми над $\Bbbk$ элементами $g_\nu\in B$. Из равенства $(\mathrm{ev}_p\otimes\mathrm{ev}_q)h=0$, справедливого для всех $(p,q)\in\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A\otimes B)$, вытекает, что при произвольно зафиксированном $p\in\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}A$ линейная комбинация $\sum f_\nu(p)\cdot g_\nu\in B$ является тождественно нулевой функцией на $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}B$ и, стало быть, равна нулю, т. к. алгебра B приведена. Это означает, что все константы $f_\nu(p)$ нулевые для всех p, т. е. $f_\nu\in A$ задают нулевые функции на $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}A$. Поскольку A приведена, $f_\nu=0$, а значит, и $h=0$. □

3.10. Топология Зарисского. На множестве $X=\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}A$ имеется каноническая топология, внутренним образом отражающая алгебраические свойства алгебры A. Эта топология называется *топологией Зарисского* и имеет в качестве замкнутых подмножеств алгебраические подмногообразия в X, т. е. множества вида

$$V(I)=\{x\in X\mid f(x)=0\quad\forall\, f\in I\}=\{\mathfrak{m}\in\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}A\mid I\subset\mathfrak{m}\}\,,$$

для всевозможных идеалов $I\subset A$.

Упражнение 3.14. Проверьте, что $V(I)$ удовлетворяют аксиоматике замкнутых множеств топологии, а именно: $\varnothing=V(1)$; $X=V(0)$; $\bigcap V(I_\nu)=V\bigl(\sum I_\nu\bigr)$, где $\sum I_\nu$ состоит из всех конечных сумм $\sum f_\nu$ с $f_\nu\in I_\nu$; $V(I)\cup V(J)=V(IJ)$, где IJ есть идеал, натянутый на все произведения ab с $a\in I$, $b\in J$.

Поскольку всякий идеал $I\subset\Bbbk[X]$ конечно порождён, каждое замкнутое множество является пересечением конечного набора гиперповерхностей:

$$V(I)=V(f_1,f_2,\dots,f_m)=\bigcap_\nu V(f_\nu)\,.$$

Тем самым, любое открытое множество является конечным объединением *главных* открытых множеств

$$\mathscr{D}(f)\stackrel{\mathrm{def}}{=}X\setminus V(f)=\{x\in X\mid f(x)\neq 0\}\,.$$

В частности, X является *квазикомпактным* пространством — любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.

Важно отметить, что топология Зарисского имеет чисто алгебраическую природу, и её свойства довольно далеки от интуитивно привычных свойств метрической топологии: окрестности Зарисского отражают скорее отношения делимости, нежели «близости».

3.10.1. Пример: неприводимые замкнутые множества. Топологическое пространство X называется *приводимым*, если оно представляется в виде объединения $X = X_1 \cup X_2$ своих непустых собственных замкнутых подмножеств $X_1, X_2 \subsetneq X$. В обычной метрической топологии это понятие бессодержательно — почти все пространства будут приводимы. В топологии Зарисского приводимость многообразия X равносильна наличию делителей нуля в алгебре $\Bbbk[X]$. В самом деле, разложение $X = X_1 \cup X_2$, в котором оба $X_i \neq X, \varnothing$, означает существование ненулевых $f_1, f_2 \in \Bbbk[X]$ таких, что f_1 обращается в нуль на X_1, а f_2 обращается в нуль на X_2, и поскольку произведение $f_1 f_2$ тождественно зануляется на всём X, оно равно нулю $\Bbbk[X]$.

В частности, аффинная гиперповерхность $\{g(x) = 0\} \subset \mathbb{A}^n$ неприводима тогда и только тогда, когда g является степенью неприводимого многочлена.

Таким образом, неприводимые алгебраические многообразия являются аналогами (степеней) простых чисел в арифметике.

3.10.2. ТЕОРЕМА. *Каждое аффинное алгебраическое множество имеет единственное разложение $X = \bigcup X_i$ в конечное объединение собственных замкнутых неприводимых подмножеств*[1] *$X_i \subset X$, таких что $X_i \not\subset X_j$ ни при каких $i \neq j$.*

Доказательство. Разложение строится индуктивно: если X приводимо, мы в качестве первого шага представим его в виде $X = Z_1 \cup Z_2$, где $Z_{1,2}$ — собственные замкнутые подмножества. Если после нескольких шагов мы получим разложение $X = \bigcup Z_\nu$ в котором все Z_ν неприводимы, процесс заканчивается, и, выкидывая неприводимые компоненты, содержащиеся в других неприводимых компонентах, мы получим требуемое разложение. В противном случае мы делаем следующий шаг, заменяя приводимые Z_ν объединениями их собственных замкнутых подмножеств. Если эта процедура не остановится через конечное число шагов, мы сможем построить бесконечную цепочку строго вложенных замкнутых подмножеств $X \supsetneq Y_1 \supsetneq Y_2 \supsetneq \dots$, идеалы которых составят бесконечную строго возрастающую цепочку $(0) \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$, что противоречит нётеровости $\Bbbk[X]$.

Единственность следует из того, что включение $Y \subset Z_1 \cup Z_2$ для неприводимого замкнутого Y и произвольных замкнутых Z_i влечёт за собой включение $Y \subset Z_1$ или включение $Y \subset Z_2$, поскольку иначе мы бы имели нетривиальное разложение $Y = (Y \cap Z_1) \cup (Y \cap Z_2)$. Тем самым, равенство двух разложений в объединение неприводимых компонент $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_m$ означает, что $X_1 \subset Y_\alpha \subset X_\beta$ для некоторых α, β, откуда $X_1 = Y_\alpha = X_\beta$. Выкидываем X_1 и Y_α и применяем индукцию. □

3.10.3. Пример: «большие» открытые множества. Топология Зарисского довольно груба и, как следствие, нехаусдорфова. Если X неприводимо, любые два открытых подмножества $U_1, U_2 \subset X$ имеют непустое пересечение, поскольку в противном случае $X = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)$. Таким образом, всякое непустое открытое подмножество неприводимого многообразия всюду плотно.

Упражнение 3.15. Пусть X неприводимо и $f, g \in \Bbbk[X]$. Докажите, что если $f|_U = g|_U$ для некоторого непустого открытого $U \subset X$, то $f = g$ в $\Bbbk[X]$.
Указание. Иначе $X = (X \smallsetminus U) \cup V(f - g)$.

3.10.4. Пример: топология Зарисского на $X \times Y$ тоньше произведения топологий Зарисского на X и Y, поскольку замкнутые $Z \subset X \times Y$ не исчерпываются произведениями замкнутых подмножеств в X, Y. Например, если $X = Y = \mathbb{A}^1$, то любая кривая, скажем, гипербола $V(xy - 1)$, замкнута в топологии Зарисского на $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^2$, в то время как произведения замкнутых множеств на $\mathbb{A}^1$ исчерпываются конечными объединениями изолированных точек и координатных прямых.

3.10.5. ЛЕММА. *Всякий регулярный морфизм алгебраических многообразий $X \xrightarrow{\varphi} Y$ непрерывен в топологии Зарисского.*

Доказательство. Прообраз $\varphi^{-1}(Z)$ замкнутого $Z = V(I) \subset Y$ состоит из всех $x \in X$, для которых $0 = f(\varphi(x)) = \varphi^* f(x) \quad \forall f \in I$, т.е. является множеством нулей идеала, порожденного в $\Bbbk[X]$ образом $\varphi^*(I)$ идеала I при гомоморфизме поднятия $\Bbbk[Y] \xrightarrow{\varphi^*} \Bbbk[X]$. □

3.11. Разложение морфизма. Всякий гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\Bbbk[Y] \xrightarrow{\varphi^*} \Bbbk[X]$ канонически разлагается в композицию эпиморфизма и вложения:

$$\Bbbk[Y] \twoheadrightarrow \Bbbk[Y]/\ker(\varphi^*) = \operatorname{im}(\varphi^*) \hookrightarrow \Bbbk[X] \,. \qquad (3\text{-}12)$$

[1] они называются *неприводимыми компонентами* многообразия X

Поскольку алгебра $\Bbbk[Y]$ конечно порождена, а алгебра $\Bbbk[X]$ приведена, алгебра $\Bbbk[Y]/\ker(\varphi^*) = \operatorname{im}(\varphi^*)$ тоже является конечно порождённой приведённой $\Bbbk$-алгеброй, отвечающей аффинному многообразию $Z = \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(\operatorname{im}(\varphi^*)) \simeq V(\ker(\varphi^*)) \subset Y$. Инъективность гомоморфизма $\Bbbk[Z]\varphi_1^*\Bbbk[X]$ означает отсутствие ненулевых функций $f \in \Bbbk[Z]$, зануляющихся на $\varphi_1(X) \subset Z$, т. е.*плотность* $\varphi_1(X)$ в Z. Таким образом, $Z = \overline{\varphi(X)} \subset Y$, и алгебраическому разложению (3-12) на геометрическом языке отвечает разложение регулярного морфизма многообразий $X \xrightarrow{\varphi} Y$ в композицию

$$X \xrightarrow{\varphi_1} Z = \overline{\varphi(X)} \xhookrightarrow{\varphi_2} Y \;.$$

3.11.1. Доминантные морфизмы. Если X неприводимо и гомоморфизм алгебр $\Bbbk[Y] \xrightarrow{\varphi^*} k[X]$ инъективен, то соответствующий морфизм $X \xrightarrow{\varphi} Y$ называется *доминантным*. Как мы видели выше, инъективность гомоморфизма поднятия означает, что $\overline{\varphi(X)} = Y$. Если X приводимо, то морфизм φ называется *доминантным*, если доминантно его ограничение на *каждую* неприводимую компоненту многообразия X.

3.11.2. Замкнутые вложения. Морфизм $X \xrightarrow{\varphi} Y$ называется *замкнутым вложением*, если его гомоморфизм поднятия $\Bbbk[Y] \xrightarrow{\varphi^*} k[X]$ сюрьективен. Геометрически это значит, что φ является изоморфизмом X с замкнутым подмногообразием $V(\ker\varphi^*) \subset Y$.

Упражнение 3.16. Покажите, что любой доминантный морфизм неприводимых аффинных многообразий $X \xrightarrow{\varphi} Y$ раскладывается в композицию

$$X \xhookrightarrow{\psi} Y \times \mathbb{A}^m \xrightarrow{\pi} Y \;, \tag{3-13}$$

где ψ — замкнутое вложение, а π — естественная проекция вдоль $\mathbb{A}^m$.

Указание. Пусть $A = \Bbbk[X]$, $B = \Bbbk[Y]$. Вложение $B \xhookrightarrow{\varphi^*} A$ задаёт на A структуру конечно порожденной B-алгебры, т. е. $A \simeq B[x_1, x_2, \dots, x_m]/J$.

3.12. Конечные морфизмы.

При наличии регулярного морфизма $X \xrightarrow{\varphi} Y$ алгебра $\Bbbk[X]$ может рассматриваться как алгебра над $\varphi^*(\Bbbk[Y]) = \Bbbk[\overline{\varphi(X)}] \subset \Bbbk[X]$. Морфизм φ называется *конечным*, если алгебра $\Bbbk[X]$ является целой над подалгеброй $\varphi^*(k[Y])$ или, что то же самое, если $\Bbbk[X]$ является конечно порождённым $\varphi^*(k[Y])$-модулем (т. е. существуют $f_1, f_2, \dots, f_m \in \Bbbk[X]$, такие что любой $h \in \Bbbk[X]$ может быть записан как $h = \sum \varphi^*(g_i)\, f_i$ с подходящими $g_i \in \Bbbk[Y]$).

3.12.1. ЛЕММА. *Любой конечный морфизм $X \xrightarrow{\varphi} Y$ аффинных алгебраических многообразий переводит всякое замкнутое подмножество $Z \subset X$ в замкнутое подмножество $\varphi(Z) \subset Y$, и индуцированный морфизм $Z \xrightarrow{\varphi|_Z} \varphi(Z)$ также будет конечен. Кроме того, если X неприводимо, то $\varphi(Z) \neq Y$ ни для какого замкнутого $Z \neq X$.*

Доказательство. Пусть $I = I(Z) \subset \Bbbk[X]$ — идеал замкнутого подмножества $Z \subset X$. Ограничение $Z \xrightarrow{\varphi|_Z} Y$ отвечает сквозному гомоморфизму алгебр $\varphi_Z^* : k[Y] \xrightarrow{\varphi^*} k[X] \longrightarrow \Bbbk[X]/I$. Поскольку алгебра $\Bbbk[X]$ конечно порождена как $\varphi^*(k[Y])$-модуль, алгебра $\Bbbk[Z] = \Bbbk[X]/I$ также конечно порождена как модуль над $\Bbbk[\,\overline{\varphi(Z)}\,] = \varphi|_Z^*(k[Y]) = \varphi^*(k[Y])/(I \cap \varphi^*(k[Y]))$. Тем самым, $Z \longrightarrow \overline{\varphi(Z)}$ — конечный морфизм.

Равенство $\varphi(Z) = \overline{\varphi(Z)}$ достаточно доказывать отдельно для каждой неприводимой компоненты Z, причём ввиду предыдущего можно заменить X на Z, а Y на $\overline{Z}$. Итак, мы должны показать, что всякий конечный доминантный морфизм $Z \xrightarrow{\varphi} Y$ неприводимого аффинного многообразия Z сюрьективен. На алгебраическом языке это означает, что для любого расширения алгебр $\Bbbk[Y] \subset \Bbbk[Z]$, такого что $\Bbbk[Z]$ не имеет делителей нуля и является конечно порождённым $\Bbbk[Y]$ модулем, всякий максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[Y]$ имеет вид $\widetilde{\mathfrak{m}} \cap \Bbbk[Y]$ для некоторого собственного максимального идеала $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \Bbbk[Z]$. Если идеал $\mathfrak{m} \cdot \Bbbk[Z]$, порождённый $\mathfrak{m}$ в $\Bbbk[Z]$, является собственным в $\Bbbk[Z]$, то в качестве $\widetilde{\mathfrak{m}}$ можно взять любой максимальный идеал, содержащий $\mathfrak{m} \cdot \Bbbk[Z]$. Таким образом, мы должны показать, что $\mathfrak{m} \cdot \Bbbk[Z] \neq \Bbbk[Z]$ ни для какого максимального идеала $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[Y]$.

Пусть это не так, и $\mathfrak{m} \cdot \Bbbk[Z] = \Bbbk[Z]$ для некоторого собственного идеала $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[Y]$. Выберем какую-нибудь систему функций $f_1, f_2, \dots, f_m$, порождающих $\Bbbk[Z]$ как $\Bbbk[Y]$-модуль. Согласно нашему предположению, каждую из них можно записать в виде $f_i = \sum \beta_{i\nu} f_\nu$ с $\beta_{i\nu} \in \mathfrak{m}$. Это означает, что нулевой

$\Bbbk[Y]$-линейный эндоморфизм модуля $\Bbbk[Z]$ представляется в образующих $\{f_\nu\}$ матрицей $E-(\beta_{\nu i})$. Но тогда умножение на $\det(E-(\beta_{ij}))$ аннулирует $\Bbbk[Z]$. Поскольку в $\Bbbk[Z]$ нет делителей нуля, мы получаем равенство $\det(E-(\beta_{ij}))=0$, из которого вытекает, что $1\in\mathfrak{m}$, т. е. $\mathfrak{m}=\Bbbk[Y]$ не является собственным.

Для доказательства неравенства $\varphi(Z)\neq Y$ при $Z\subsetneq X$ рассмотрим какую-нибудь ненулевую функцию $f\in\Bbbk[X]$, тождественно зануляющуюся вдоль Z, и запишем для неё целое уравнение над $\varphi^*(k[Y])$ минимальной возможной степени: $f^m+\varphi^*(g_1)\,f^{m-1}+\cdots+\varphi^*(g_{m-1})\,f+\varphi^*(g_m)=0$. Вычисляя его левую часть в точках $z\in Z$, получим $\varphi^*(g_m)|_z=g_m|_{\varphi(z)}\equiv 0$, но при этом $g_m\neq 0$ в $\Bbbk[Y]$, т. к. иначе мы могли бы сократить уравнение на f (ибо в $\Bbbk[X]$ нет делителей нуля). Таким образом, $\varphi(Z)\subset V(g_m)\subsetneq Y$. □

3.13. Нормальные многообразия. Если аффинное многообразие Y неприводимо, алгебра $\Bbbk[Y]$ не имеет делителей нуля. Её поле частных обозначается в этом случае $\Bbbk(Y)$ и называется ***полем рациональных функций*** на Y. Неприводимое аффинное алгебраическое многообразие Y называется ***нормальным***, если алгебра $\Bbbk[Y]$ нормальна, т. е. все рациональные функции $f\in\Bbbk(Y)$, целые над $\Bbbk[Y]$, лежат в $\Bbbk[Y]$. Например, аффинное пространство $\mathbb{A}^n$ нормально (как и любое другое многообразие с факториальной координатной алгеброй).

3.13.1. Лемма. *Всякий сюрьективный конечный морфизм $X\xrightarrow{\varphi}Y$ в нормальное многообразие Y открыт (т. е. $\varphi(U)$ открыто в Y для любого открытого $U\subset X$) и сюрьективно отображает на Y каждую неприводимую компоненту многообразия X.*

Доказательство. Отождествим $\Bbbk[Y]$ с подалгеброй в $\Bbbk[X]$ при помощи φ^*. Для проверки первого утверждения достаточно доказать, что образ каждого главного открытого множества $\mathscr{D}(f)\subset X$ целиком содержит некоторую главную открытую окрестность каждой своей точки. Иначе говоря, для любой функции $f\in\Bbbk[X]$ и любой точки $p\in X$, где $f(p)\neq 0$, мы должны подобрать функцию $a\in\Bbbk[Y]$, такую что $\varphi(p)\in\mathscr{D}(a)\subset\varphi(\mathscr{D}(f))$ на Y. Для этого рассмотрим отображение

$$\psi=\varphi\times f\;:\;X\xrightarrow{p\mapsto(\varphi(p),f(p))}Y\times\mathbb{A}^1\,.$$

Оно регулярно и конечно, поскольку гомоморфизм поднятия

$$\psi^*\;:\;\Bbbk[Y\times\mathbb{A}^1]=\Bbbk[Y][t]\xrightarrow{t\mapsto f}k[X]$$

есть ни что иное, как вычисление полиномов от t с коэффициентами в $\Bbbk[Y]$ на элементе $f\in\Bbbk[X]$, и конечно порождённый $\Bbbk[Y]$-модуль $\Bbbk[X]$ будет тем более конечно порождён как модуль над $\Bbbk[Y][t]$. Согласно следствию из n° 3.2.2, минимальный многочлен μ_f элемента f над полем частных $\Bbbk(Y)$ алгебры $\Bbbk[Y]$ лежит в координатной алгебре $\Bbbk[Y]$. Поэтому $\ker\psi^*=(\mu_f)$ является главным идеалом в $\Bbbk[Y][t]$. Иными словами, образ морфизма ψ является в $Y\times\mathbb{A}^1$ гиперповерхностью, заданной уравнением $\mu_f=0$. Пусть

$$\mu_f=\mu_f(y;t)=t^m+a_1(y)\,t^{m-1}+\cdots+a_m(y)\,.$$

Принадлежность точки $q\in Y$ образу множества $\mathscr{D}(f)$ означает наличие у многочлена $\mu_f(q;t)$ ненулевого корня t, что равносильно не обращению в нуль в этой точке хотя бы одного из коэффициентов a_i. В частности, $a_i(\varphi(p))\neq 0$ для для какого-то i. Но тогда $\varphi(p)\in\mathscr{D}(a_i)\subset\varphi(\mathscr{D}(f))$, что и требовалось.

Что касается ограничения φ на компоненты неприводимого разложения $X=\cup X_\nu$, то для каждого i множество $U_i=X\setminus\bigcup\limits_{\nu\neq i}X_\nu=X_i\setminus\bigcup\limits_{\nu\neq i}(X_i\cap X_\nu)$ открыто в X и плотно в X_i. Поскольку $\varphi(U_i)$ открыто, а Y неприводимо, $\varphi(U_i)$ плотно в Y, т. е. $\varphi(X_i)=\overline{\varphi(U_i)}=Y$. □

§4. Алгебраические многообразия.

В этой лекции мы продолжаем по умолчанию предполагать, что основное поле $\Bbbk$ является алгебраически замкнутым.

4.1. Локальные регулярные функции. Рассмотрим непустое открытое подмножество U аффинного алгебраического многообразия X. Функция $U \xrightarrow{f} \Bbbk$ называется *регулярной* в точке $u \in U$, если существуют $p, q \in \Bbbk[X]$, такие что $q(u) \neq 0$ и $f(x) = p(x)/q(x)\ \forall\, x \in \mathscr{D}(q) \cap U$. Функции $U \xrightarrow{f} \Bbbk$, регулярные в каждой точке $u \in U$, образуют коммутативное кольцо, обозначаемое $\mathscr{O}_X(U)$ или $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$. Оно называется *кольцом локальных регулярных функций* на $U \subset X$.

4.1.1. Утверждение. *Если X неприводимо, то $\mathscr{O}_X(\mathscr{D}(h)) = \Bbbk[X][h^{-1}]\ \forall h \in \Bbbk[X]$. Иными словами, каждая регулярная функция $f \in \mathscr{O}_X(\mathscr{D}(h))$ записывается в виде $f(x) = r(x)/h^d(x)$ с подходящими $r \in \Bbbk[X]$, $d \in \mathbb{N}$ «в частности, для $h \equiv 1$, мы получим $\mathscr{O}_X(X) = \Bbbk[X]$».*

Доказательство. Если $f \in \mathscr{O}_X(\mathscr{D}(h))$, то $\forall\, u \in \mathscr{D}(h)\ \exists\, p_u, q_u \in \Bbbk[X]$ такие, что $q_u(u) \neq 0$ и $f(x) = p_u(x)/q_u(x)$ $\forall\, x \in \mathscr{D}(q_u) \cap \mathscr{D}(h)$. Поскольку $\bigcap\limits_{u \in U} V(q_u) \subset V(h)$, по теореме Гильберта о нулях найдутся $u_1, u_2, \dots, u_m \in \mathscr{D}(h)$, такие что $h^d = \sum q_{u_\nu} g_\nu$ для подходящих $g_1, g_2, \dots, g_m \in \Bbbk[X]$ и $d \in \mathbb{N}$. В то же время, для каждого ν мы имеем равенство $f(x)\, q_{u_\nu}(x) = p_{u_\nu}(x)$, которое выполняется для всех $x \in \mathscr{D}(h)$, включая те, для которых $q_{u_\nu}(x) = 0$. Действительно, пусть $q_{u_\nu}(w) = 0$ для некоторого $w \in \mathscr{D}(h)$. Тогда, переписывая $f = p_{u_\nu}/q_{u_\nu}$ как p_w/q_w с $q_w(w) \neq 0$, мы получим $p_{u_\nu}(x)\, q_w(x) = q_{u_\nu}(x)\, p_w(x)$ для всех $x \in \mathscr{D}(h \cdot q_{u_\nu} \cdot q_w)$, а значит (см. упр. 3.15), вообще для всех $x \in X$. В частности $p_{u_\nu}(w) = q_{u_\nu}(w)\, p_w(w)/q_w(w) = 0 = f(w)\, q_{u_\nu}(w)$. Таким образом, $f\, h^d = \sum f\, q_{u_\nu}\, g_\nu = \sum p_{u_\nu}\, g_\nu \in \Bbbk[X]$. □

4.1.2. Следствие. *Каждое главное открытое подмножество $\mathscr{D}(f) = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X][f^{-1}]$ неприводимого аффинного многообразия X является аффинным алгебраическим многообразием, и включение $\mathscr{D}(f) \hookrightarrow X$ является регулярным морфизмом, отвечающим вложению алгебр $\Bbbk[X] \hookrightarrow \Bbbk[X][f^{-1}]$.* □

4.2. Структурный пучок. Соответствие[1] $\mathscr{O}_X : U \longmapsto \mathscr{O}_X(U)$ называется *структурным пучком* аффинного алгебраического многообразия X. Отметим, что функция $U \xrightarrow{f} \Bbbk$ на объединении открытых множеств $U = \bigcup W_i$ регулярна тогда и только тогда, когда регулярно каждое ограничение $f|_{W_i}$, и наоборот, для любого набора локальных регулярных функций $W_i \xrightarrow{f_i} \Bbbk$, таких что $f_i \equiv f_j$ на $W_i \cap W_j$, существует единственная регулярная функция $f \in \mathscr{O}_X(\cup W_i)$, ограничение которой на каждое W_i совпадает с f_i — последнее условие, собственно, и означает что предпучок $U \longmapsto \mathscr{O}_X(U)$ является *пучком*.

Отметим, что хотя следствие n° 4.1.2 и утверждает, что открытые множества являются *локально* аффинными, произвольное открытое подмножество U аффинного алгебраического множества X обычно аффинным алгебраическим многообразием *не является*: во-первых, алгебра $\mathscr{O}_X(U)$ может оказаться не конечно порожденной, во-вторых, даже когда она конечно порождена, биекции между $\operatorname{Spec_m} \mathscr{O}_X(U)$ и точками U может и не быть.

Упражнение 4.1. Пусть $U = \mathbb{A}^n \smallsetminus O$ — дополнение к началу координат. Покажите, что $\mathscr{O}_{\mathbb{A}^n}(U) = \Bbbk[\mathbb{A}^n]$ при $n \geqslant 2$.
Указание. Используйте покрытие $U = \bigcup \mathscr{D}(x_i)$ и утверждение n° 4.1.1.

Упражнение 4.2. Покажите, что открытое подмножество U аффинного многообразия является аффинным , если и только если найдутся $f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathscr{O}_X(U)$, такие что идеал $(f_1, f_2, \dots, f_m) = \mathscr{O}_X(U)$ и каждое из подмножеств $U_i = \{p \in U \mid f_i(p) \neq 0\}$ является аффинным многообразием.

[1] понимаемое как контравариантный функтор из категории открытых подмножеств $U \subset X$ в категорию $\Bbbk$-алгебр

4.3. Алгебраические многообразия. Открытое подмножество $U \subset X$ топологического пространства X называется *алгебраической аффинной картой*, если существует аффинное алгебраическое многообразие X_U (рассматриваемое как топологическое пространство с топологией Зарисского) и *гомеоморфизм* $X_U \xrightarrow{\varphi_U} U$. Две алгебраических карты $X_U \xrightarrow{\varphi_U} U$ и $X_W \xrightarrow{\varphi_W} W$ на X называются *совместимыми*, если *гомеоморфизм склейки*

$$\varphi_{WU} = \varphi_W \circ \varphi_U^{-1} \,:\, X_U \supset \varphi_U^{-1}(U \cap W) \xrightarrow{\sim} \varphi_W^{-1}(U \cap W) \subset X_W$$

является *регулярным изоморфизмом* в том смысле, что его гомоморфизм поднятия

$$\Gamma\left(\varphi_W^{-1}(U \cap W)\,,\, \mathcal{O}_{X_W}\right) \xrightarrow{\varphi_{WU}^*} \Gamma\left(\varphi_U^{-1}(U \cap W)\,,\, \mathcal{O}_{X_U}\right)$$

является корректно определенным изоморфизмом $\Bbbk$-алгебр. Открытое покрытие $X = \bigcup U_\nu$ попарно совместимыми алгебраическими картами называется *алгебраическим атласом* на X. Два алгебраических атласа называются *эквивалентными*, если их объединение также представляет собой алгебраический атлас. Топологическое пространство X, снабженное классом эквивалентных алгебраических атласов называется *алгебраическим многообразием*. Алгебраические многообразия, обладающие конечным атласом, называются многообразиями *конечного типа*.

Упражнение 4.3. Убедитесь, что проективные пространства, грассманианы и все проективные алгебраические многообразия являются алгебраическими многообразиями в смысле данного выше определения.

4.3.1. Пример: отделимость. Стандартный атлас на $\mathbb{P}_1$ состоит из двух карт $\varphi_i : \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\sim} U_i \subset \mathbb{P}_1$, $i = 0, 1$, причём пересечение $\varphi_0^{-1}(U_0 \cap U_1) = \varphi_1^{-1}(U_0 \cap U_1) = \mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\} = \{t \in \mathbb{A}^1 \mid t \neq 0\}$ видно в каждой из карт как дополнение к началу координат. Карты $U_{0,1} = \mathbb{A}^1$ склеены друг с другом вдоль $\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\}$ посредством отображения $\varphi_{01} : t \mapsto 1/t$. Если мы заменим его на тождественное отображение $\widetilde{\varphi}_{01} : t \mapsto t$, то мы получим другое многообразие — прямую с «раздвоенной точкой»: . Такая патология называется *неотделимостью*. Возникла она из-за того, что второе правило склейки не замкнуто: его можно «непрерывно продолжить» с $\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\}$ на всё $\mathbb{A}^1 = \overline{\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\}}$.

Формализуется это так. Включения $U_0 \hookleftarrow U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_1$ задают вложение $U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_0 \times U_1$. Так, для $\mathbb{P}_1$ получится вложение $(\mathbb{A}^1 \smallsetminus O) \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ по правилу $t \mapsto (t\,,\, t^{-1})$, отождествляющее $U_0 \cap U_1$ с замкнутым подмножеством $V(xy-1) \subset \mathbb{A}^2 = U_0 \times U_1$. Во втором примере, вложение $U_0 \cap U_1 \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ задается правилом $t \mapsto (t\,,\, t)$, и его образ не замкнут — это открытое подмножество $\Delta \smallsetminus \{(0,0)\}$ диагонали $\Delta = V(x-y) \subset \mathbb{A}^2$.

Алгебраическое многообразие X называется *отделимым*, если для любой пары аффинных карт U, W на X образ канонического вложения $U \cap W \hookrightarrow U \times W$ замкнут. Поскольку этот образ есть не что иное, как пересечение диагонали $\Delta \subset X \times X$ с аффинной картой $U \times W$ на $X \times X$, многообразие X отделимо, если и только если диагональ $\Delta \subset X \times X$ замкнута в $X \times X$.

Например, $\mathbb{A}^n$ и $\mathbb{P}_n$ отделимы, поскольку диагонали в $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ и в $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n$ задаются, соответственно, уравнениями $x_i = y_i$ и $x_i y_j = x_j y_i$.

4.4. Регулярные функции и морфизмы. Функция $X \xrightarrow{f} \Bbbk$ называется *регулярной* в точке x, если её ограничение на некоторую аффинную окрестность этой точки является там регулярной функцией в смысле n° 4.1 в какой-нибудь открытой окрестности U точки x. Функции $U \longrightarrow \Bbbk$ на открытом подмножестве $U \subset X$, регулярные в каждой точке этого подмножества, образуют коммутативное кольцо $\mathcal{O}_X(U)$, и соответствие $U \longmapsto \mathcal{O}_X(U)$ называется *структурным пучком* многообразия X. Отображение алгебраических многообразий $X \xrightarrow{\varphi} Y$ называется *регулярным*, если $\forall\, x \in X$ и любой локальной регулярной функции $f \in \mathcal{O}_Y(W)$, определённой в какой-либо окрестности W точки $\varphi(x)$, существует окрестность $U \subset \varphi^{-1}(W)$ точки x, такая что $\varphi^*(f) \in \mathcal{O}_X(U)$. Иными словами, над каждым открытом $U \subset Y$ гомоморфизм поднятия должен быть корректно определенным гомоморфизмом колец локальных регулярных функций. В частности, множество регулярных морфизмов $X \longrightarrow \mathbb{A}^1$ совпадает с $\mathcal{O}_X(X)$.

4.4.1. Рациональные отображения. Регулярный морфизм $U \xrightarrow{\varphi} Y$, определенный на некотором открытом плотном подмножестве U алгебраического многообразия X, называется *рациональным отображением* из X в Y. Формально говоря, рациональное отображение (в теоретикомножественном смысле) не является отображением «из X», ибо определено не везде. В частности, композиция рациональных отображений не определена, когда образ первого отображения оказывается целиком вне области определения второго. Тем не менее, рациональные отображения часто возникают в алгебраической геометрии.

4.4.2. Пример: проекция $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V) \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, переводящая точку $A \in \mathbb{A}^n$ в прямую[1] $(OA) \in \mathbb{P}_n$ является сюрьективным рациональным морфизмом, определенным на $U = \mathbb{A}^n \smallsetminus O$. В стандартной аффинной карте $\mathbb{A}^n \xrightarrow{\varphi_i} U_i = \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{P}_n \mid t_i = 1\}$, соответствующий гомоморфизм поднятия

$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}_n}(U_i) = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \xrightarrow{\pi^*} \Bbbk[t_0, t_1, \dots, t_n]\left[t_i^{-1}\right] = \mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n+1}}(\mathscr{D}(t_i)) = \mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n+1}}(\pi^{-1}(U_i))$$

переводит $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в $\widetilde{f}(t_0, t_1, \dots, t_n) = f(t_0/t_i\,, \dots, t_{i-1}/t_i\,, t_{i+1}/t_i\,, \dots, t_n/t_i)$.

4.5. Замкнутые подмногообразия. Каждое замкнутое подмножество $Z \subset X$ алгебраического многообразия X имеет естественную структуру алгебраического многообразия. А именно, для каждой аффинной карты U пересечение $Z \cap U$ есть замкнутое подмножество U, т.е. аффинное алгебраическое множество $\operatorname{Spec_m}(\mathscr{O}_X(U)/\mathscr{I}_Z(U))$, где $\mathscr{I}_Z(U) = \{f \in \mathscr{O}_X(U) \mid f|_Z \equiv 0\}$ есть идеал $Z \cap U$ в U. Соответствие $U \longmapsto \mathscr{I}_Z(U)$ называется *пучком идеалов* замкнутого подмногообразия $Z \subset X$. Он является подпучком структурного пучка и состоит из всех локальных регулярных функций, тождественно обращающихся в нуль на Z. Регулярный морфизм $X \xrightarrow{\varphi} Y$ называется *замкнутым вложением*, если $\varphi(X) \subset Y$ является замкнутым подмногообразием и φ устанавливает изоморфизм между X и $\varphi(X)$. Будем называть многообразие X *аффинным* (соотв. *проективным*), если оно допускает замкнутое вложение $X \hookrightarrow \mathbb{A}^m$ (соотв. $X \hookrightarrow \mathbb{P}_m$) для некоторого m.

Упражнение 4.4. Убедитесь, что аффинные и проективные алгебраические многообразия, понимаемые как подмножества в аффинном (соотв. проективном) пространстве, заданные системой полиномиальных (соотв. однородных полиномиальных) уравнений являются аффинными (соотв. проективными) многообразиями в смысле предыдущего определения.

4.5.1. Пример: замкнутое подмногообразие $X \subset Y$ отделимого многообразия Y тоже отделимо, поскольку диагональ в $X \times X$ является прообразом диагонали в $Y \times Y$ при вложении $X \times X \hookrightarrow Y \times Y$. В частности, всякое аффинное или проективное многообразие отделимо и имеет конечный тип.

4.5.2. Пример: график морфизма. Пусть $X \xrightarrow{\varphi} Y$ — регулярный морфизм. Прообраз диагонали $\Delta \subset Y \times Y$ при индуцированном морфизме $X \times Y \xrightarrow{\varphi \times \mathrm{Id}_Y} Y \times Y$ называется *графиком* φ и обозначается через Γ_φ. Геометрически, $\Gamma_\varphi = \{(x, f(x))\} \subset X \times Y$. Если Y отделимо, то график замкнут. Например, график регулярного морфизма аффинных многообразий $\operatorname{Spec_m}(A) \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Spec_m}(B)$ задается в $A \otimes B$ системой уравнений $1 \otimes f = \varphi^*(f) \otimes 1$, где f пробегает B.

4.5.3. Пример: семейства замкнутых подмногообразий. Каждый регулярный морфизм $X \xrightarrow{\pi} Y$ может восприниматься как семейство замкнутых подмногообразий $X_y = \pi^{-1}(y) \subset X$, параметризованное точками $y \in Y$. Если $X \xrightarrow{\pi} Y$, $X' \xrightarrow{\pi'} Y$ — два семейства с одной и той же базой, то регулярный морфизм $X \xrightarrow{\varphi} X'$ называется *морфизмом семейств* (или морфизмом *над* Y), если он переводит X_y в X'_y для каждого $y \in Y$, т.е. если $\pi = \pi' \circ \varphi$. Семейство $X \xrightarrow{\pi} Y$ называется *постоянным* или *тривиальным*, если оно изоморфно над Y прямому произведению $X_0 \times Y \xrightarrow{\pi_Y} Y$ для некоторого многообразия X_0.

4.5.4. Пример: раздутие точки $p \in \mathbb{P}_n$. Прямые, проходящие через заданную точку $p \in \mathbb{P}_n$, образуют проективное пространство $E \simeq \mathbb{P}_{n-1}$, которое можно отождествить с любой не содержащей p гиперплоскостью $H \subset \mathbb{P}_n$. График инцидентности $\mathscr{B}_p = \{(\ell, q) \in E \times \mathbb{P}_n \mid q \in \ell\}$ называется *раздутием* точки $p \in \mathbb{P}_n$. Проекция

$$\mathscr{B}_p \xrightarrow{\sigma_p} \mathbb{P}_n$$

биективна всюду над $\mathbb{P}_n \smallsetminus \{p\}$, однако прообраз самой точки p совпадает с E, и тем самым, имеет коразмерность 1 в $\mathscr{B}_p$. Он называется *исключительным дивизором*. Вторая проекция

$$\mathscr{B}_p \xrightarrow{\varrho_E} E$$

[1] рассматриваемую как одномерное векторное подпространство в V

реализует $\mathscr{B}_p$ как *линейное расслоение* над E, слой которого над точкой $q \in E$ — это прямая $(pq) \subset \mathbb{P}_n$. Это расслоение называется *тавтологическим* линейным расслоением над E.

Иными словами, раздутие точки p можно представлять себе как результат выкалывания этой точки с последующей вклейкой в образовавшееся точечное отверстие целого проективного пространства E, параметризующего все проходящие через p прямые, так чтобы при подходе к точке p вдоль любой прямой мы попадали в отвечающую этой прямой точку пространства E.

Если фиксировать однородные координаты $(t_0 : t_1 : \ldots : t_n)$ на $\mathbb{P}_n$ так, чтобы $p = (1 : 0 : \ldots : 0)$, и отождествить E с гиперплоскостью $H = \{(0 : q_1 : \ldots : q_n)\} \subset \mathbb{P}_n$, то условие $(q,t) \in \mathscr{B}_p$ будет равносильно системе квадратичных уравнений

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_1 & \cdots & q_n \\ t_0 & t_1 & \cdots & t_n \end{pmatrix} = 2\,, \quad \text{или} \quad q_i t_j = q_j t_i \quad \forall\, 1 \leqslant i < j \leqslant n\,.$$

Таким образом, $\mathscr{B}_p$ есть замкнутое подмногообразие $H \times \mathbb{P}_n$.

4.6. Замкнутые морфизмы. Регулярный морфизм $X \xrightarrow{\varphi} Y$ называется *замкнутым*, если $\varphi(Z) \subset Y$ замкнуто для любого замкнутого $Z \subset X$. Любое замкнутое вложение замкнуто. Из утверждения n° 3.12.1 вытекает, что всякий конечный морфизм аффинных многообразий замкнут.

4.6.1. ЛЕММА. *Проекция $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^n$ замкнута.*

Доказательство. Зафиксируем однородные координаты t на $\mathbb{P}_n$ и аффинные координаты x на $\mathbb{A}^n$. Замкнутое подмножество $X \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$ задаётся некоторой системой полиномиальных уравнений $f_\nu(t,x) = 0$ (однородных по t). Его образ $\pi(X) \subset \mathbb{A}^n$ состоит из всех точек p, при подстановке которых вместо x будет получаться система однородных уравнений $f_\nu(t,p) = 0$ на t, задающая непустое подмногообразие в $\mathbb{P}_n$. Как мы видели в n° 3.7, последнее условие равносильно тому, что коэффициенты форм $f_\nu(t,p)$, являющиеся полиномами от p, удовлетворяют системе результантных полиномиальных уравнений. □

4.6.2. СЛЕДСТВИЕ. *Если многообразие X проективно, то проекция $X \times Y \longrightarrow Y$ замкнута для любого многообразия Y.*

Доказательство. Ограничиваясь на аффинные карты в Y, мы можем считать Y аффинным. Тогда $X \times Y$ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$, и наша проекция получается ограничением замкнутого отображения $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ на замкнутое подмножество $X \times Y \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$. □

4.6.3. СЛЕДСТВИЕ. *Если X проективно, а Y отделимо, то любой морфизм $X \xrightarrow{\varphi} Y$ замкнут.*

Доказательство. Для каждого замкнутого $Z \subset X$ произведение $Z \times Y$ замкнуто в $X \times Y$. Поскольку Y отделимо, график $\Gamma_\varphi \subset X \times Y$ тоже замкнут. Но $\varphi(Z)$ есть образ $\Gamma_\varphi \cap (Z \times Y)$ при проекции $X \times Y \longrightarrow Y$, которая замкнута. □

4.6.4. СЛЕДСТВИЕ. *Любое регулярное отображение из связного проективного многообразия X в любое аффинное многообразие постоянно «т. е. стягивает X в одну точку». В частности, $\mathscr{O}_X(X) = \mathbb{k}$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть отображения $X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{A}^n$. Беря композицию такого отображения с координатными формами $\mathbb{A}^n \xrightarrow{x_i} \mathbb{A}^1$, мы сводим утверждение к случаю $n = 1$. Отождествляя $\mathbb{A}^1$ с аффинной картой на $\mathbb{P}_1$, получаем регулярное несюрьективное отображение $X \longrightarrow \mathbb{P}_1$, образ которого замкнут и связен, т. е. является одной точкой. □

4.7. Ещё раз о конечных морфизмах. Регулярный морфизм алгебраических многообразий $X \xrightarrow{\varphi} Y$ называется *конечным*, если прообраз $W = \varphi^{-1}(U)$ любой аффинной карты $U \subset Y$ является аффинной картой на X, и ограничение $W \xrightarrow{\varphi_W} U$ является конечным морфизмом (аффинных многообразий). Из n° 3.12.1 следует, что каждый конечный морфизм замкнут и ограничение конечного морфизма на замкнутое подмногообразие $Z \subset X$ также конечный морфизм.

Более того, если X неприводимо, то собственное замкнутое подмножество $Z \subset X$ переходит в *собственное* замкнутое подмножество Y.

4.7.1. Пример: проекция любого проективного многообразия $X \subsetneq \mathbb{P}_n$ из любой точки $p \notin X$ на любую гиперплоскость $H \not\ni p$ является конечным морфизмом. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим аффинную карту $U \subset H$ и зафиксируем на $\mathbb{P}_n$ однородные координаты $(t_0 : t_1 : \ \dots \ : t_n)$, в которых

$$\begin{aligned} p &= (1 : 0 : \ \dots \ : 0) \\ H &= \{(0 : q_1 : \ \dots \ : q_n)\} \\ U &= \{u = (0 : u_1 : \ \dots \ : u_{n-1} : 1)\} \end{aligned}$$

(как в n° 4.5.4). Поскольку $p \notin X$, прообраз $Y = \pi_p^{-1}(U) \subset X$ лежит внутри проколотого конуса над U (с выколотой вершиной p), который изоморфен (как алгебраическое многообразие) аффинному пространству $\mathbb{A}^n = U \times \mathbb{A}^1$. Изоморфизм задаётся ограничением на конус морфизма раздутия $\mathscr{B}_p \xrightarrow{\sigma_p} \mathbb{P}_n$ и в терминах координат представляет собою подстановку $t = \vartheta p + u$, где $\vartheta \in \mathbb{A}^1$, $u \in U$. Если X задаётся системой однородных уравнений $f_\nu(t) = 0$, то в аффинных координатах (u, ϑ) на $U \times \mathbb{A}^1$ прообраз $Y = \pi_p^{-1}(U)$ будет описываться уравнениями

$$f_\nu(\vartheta p + u) = \alpha_0^{(\nu)}(u)\,\vartheta^m + \alpha_1^{(\nu)}(u)\,\vartheta^{m-1} + \ \cdots \ + \alpha_m^{(\nu)}(u) = 0\,. \tag{4-1}$$

Тем самым, Y является аффинным алгебраическим многообразием. Чтобы убедиться в том, что алгебра $\Bbbk[Y] = \Bbbk[u][\vartheta]/(f_\nu(\vartheta p + u))$ конечно порождена как $\Bbbk[u]$-модуль, достаточно найти в идеале, порождённом уравнениями (4-1), хотя бы одно уравнение со старшим коэффициентом $\alpha_0(u) \equiv 1$ (ибо тогда после факторизации по одному только этому уравнению мы уже получим конечно порождённый $\Bbbk[u]$-модуль). Существование такого уравнения равносильно тому, что идеал, порождённый в $\Bbbk[u]$ старшими коэффициентами $\alpha_0^{(\nu)}(u)$ всех уравнений (4-1), содержит единицу, что по теореме Гильберта равносильно отсутствию у многочленов $\alpha_0^{(\nu)}(u)$ общих нулей в U. Но если бы такой общий нуль u_0 существовал, то однородные версии уравнений[1] (4-1):

$$f_\nu(\vartheta_0\, p + \vartheta_1\, u) = \alpha_0^{(\nu)}(u_0)\,\vartheta_0^m + \alpha_1^{(\nu)}(u_0)\,\vartheta_0^{m-1}\vartheta_1 + \ \cdots \ + \alpha_m^{(\nu)}(u_0)\vartheta_1^m = 0$$

имели бы общий корень $(\vartheta_0 : \vartheta_1) = (1 : 0)$ над точкой $u_0 \in U$. Но эти однородные уравнения описывают $X \cap (pu_0)$ в терминах однородных координат $(\vartheta_0 : \vartheta_1)$ на прямой $(pu_0) = \{\vartheta_0\, p + \vartheta_1\, u_0\}$, и корень $(\vartheta_0 : \vartheta_1) = (1 : 0)$ отвечает самой точке p, которая не лежит в X.

Упражнение 4.5. Проверьте, что композиция конечных морфизмов конечна и докажите, что каждое проективное многообразие допускает конечный сюрьективный морфизм на проективное пространство.

4.7.2. СЛЕДСТВИЕ. *Каждое аффинное многообразие X допускает конечный сюрьективный морфизм φ на аффинное пространство.*

Доказательство. Пусть $X \subsetneq \mathbb{A}^n$, где $\mathbb{A}^n$ вложено в $\mathbb{P}_n$ как стандартная карта U_0. Положим $H_\infty \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}_n \smallsetminus U_0$ и обозначим через $\overline{X} \subset \mathbb{P}_n$ проективное замыкание аффинного многообразия X. Проекция $\overline{X}$ из любой точки $p \in H_\infty \smallsetminus \overline{X}$ на любую гиперплоскость $L \not\ni p$, видимую в аффинной карте U как $\mathbb{A}^{n-1} = L \smallsetminus H_\infty$, индуцирует конечный морфизм из $X = \overline{X} \smallsetminus H_\infty$ в это $\mathbb{A}^{n-1}$ (видимый в аффинной карте U как параллельная проекция в направлении вектора p). Если он окажется не сюрьективным, повторим процедуру. □

4.8. Размерность. Максимальное $n \in \mathbb{N}$, для которого существует цепочка неприводимых замкнутых подмножеств

$$\{x\} = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \ \cdots \ \subsetneq X_{n-1} \subsetneq X_n \subset X\ , \tag{4-2}$$

называется *размерностью* алгебраического многообразия X в данной точке $x \in X$ и обозначается через $\dim_x X$. Разумеется, когда X неприводимо, во всякой такой максимальной цепочке мы будем иметь $X_n = X$. Если же X приводимо, то $\dim_x X$ равна максимуму из размерностей всех проходящих через x неприводимых компонент.

[1] они получаются подстановкой $t = \vartheta_0\, p + \vartheta_1\, u$ в уравнения, описывающие X в $\mathbb{P}_n$, и связаны с уравнениями (4-1) подстановкой $(\vartheta_0 : \vartheta_1) = (\vartheta : 1)$

Упражнение 4.6. Покажите, что $\dim_p X = \dim_p U$ для каждой аффинной карты $U \ni p$.

Указание. Пусть $X_1, X_2 \subset X$ — два замкнутых неприводимых подмножества и $U \subset X$ — открытое множество, такое что оба пересечения $X_1 \cap U$, $X_2 \cap U$ непусты. Тогда $X_1 = X_2 \iff X_1 \cap U = X_1 \cap U$, поскольку $X_i = \overline{X_i \cap U}$.

Упражнение 4.7. Докажите, что $\dim_x X \geqslant \dim_{\varphi(x)} Y$ для любого сюрьективного морфизма неприводимых многообразий $X \xrightarrow{\varphi} Y$ в любой точке $x \in X$.

Указание. Для любой цепочки (4-2) в Y для каждого i найдётся неприводимая компонента $\varphi^{-1}(X_i)$, сюрьективно отображающаяся на X_i. Это дает цепочку (4-2) в X.

4.8.1. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Пусть $X \xrightarrow{\varphi} Y$ — конечный морфизм неприводимых многообразий, и $x \in X$. Тогда $\dim_x X \leqslant \dim_{\varphi(x)} Y$ и равенство равносильно тому, что $\varphi(X) = Y$.*

Доказательство. Согласно упр. 4.6 достаточно считать X и Y аффинными. Утверждение из n° 3.12.1 показывает, что каждая цепочка (4-2) в X порождает цепочку $\cdots \subsetneq \varphi(X_i) \subsetneq \varphi(X_{i+1}) \subsetneq \cdots$ строго вложенных замкнутых неприводимых подмногообразий в Y, что даёт нужное нам неравенство. В случае $\varphi(X) = Y$ упр. 4.7 даёт противоположное неравенство. □

4.8.2. СЛЕДСТВИЕ. $\dim_p \mathbb{A}^n = n$ *в любой точке* $p \in \mathbb{A}^n$.

Доказательство. Ясно, что $\dim \mathbb{A}^0 = 0$ и $\dim_p \mathbb{A}^n \geqslant n$, поскольку имеется цепочка (4-2), образованная аффинными подпространствами, проходящими через p. Неравенство $\dim_p \mathbb{A}^n \leqslant n$ получается по индукции: последний отличный от $\mathbb{A}_n$ элемент цепочки (4-2) допускает сюрьективный конечный морфизм на собственное аффинное подпространство в $\mathbb{A}_n$, и поэтому его размерность (а значит, и его номер в цепочке) строго меньше n. □

4.8.3. СЛЕДСТВИЕ. *Пусть X — неприводимое аффинное многообразие и $X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{A}^m$ — сюрьективный конечный морфизм. Тогда $\dim_p X = m$ в каждой точке $p \in X$. В частности, m не зависит от выбора φ, а $\dim_p X$ одна и та же для всех $p \in X$.* □

4.9. Размерность как степень трансцендентности. Пусть X — неприводимое аффинное многообразие. Конечный эпиморфизм $X \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^m$ из следствия n° 4.7.2 соответствует целому расширению $\Bbbk[X] \supset \Bbbk[u_1, u_2, \dots, u_m] = \Bbbk[\mathbb{A}^m]$. Таким образом, аффинные координатные функции $u_1, u_2, \dots, u_n$ образуют базис трансцендентности $\Bbbk[X]$ над $\Bbbk$ и $\dim X$ равна степени трансцендентности $\Bbbk[X]$ над $\Bbbk$.

Упражнение 4.8. Докажите, что $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$ для любых неприводимых многообразий X, Y.

Указание. Докажите, что произведение конечных сюрьекций $X \longrightarrow \mathbb{A}^n$, $Y \longrightarrow \mathbb{A}^m$ является конечной сюрьекцией $X \times Y \longrightarrow \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$.

Упражнение 4.9. Пусть $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ неприводим. Покажите, что $\dim V(f) = (n-1)$ в $\mathbb{A}^n$.

Указание. Постройте конечную сюрьективную проекцию $V(f) \longrightarrow \mathbb{A}^{n-1}$ (ср. с упр. 4.5 и следствием из n° 4.7.2).

4.10. Регулярные системы уравнений. Если многообразие X приводимо, например, является объединением двух неприводимых компонент $X = X_1 \cup X_2$ одинаковой размерности, то непостоянная функция f, зануляющаяся сразу на целой компоненте, скажем, на X_1, задаёт в X гиперповерхность той же размерности, что и само X.

Обращение функции f в нуль на компоенте многообразия X равносильно тому, что f является делителем нуля в $\Bbbk[X]$. Последовательность необратимых функций $f_1, f_2, \dots, f_m \in \Bbbk[X]$ называется *регулярной*, если ни при каком i функция

$$f_i \,(\mathrm{mod}\,(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})) \in \Bbbk[X]/(f_1, f_2, \dots, f_{i-1}) = \Bbbk[V(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})]$$

не делит нуль в этой фактор алгебре.

В регулярной последовательности уравнений никакое из уравнений f_i не зануляется тождественно ни на одной из неприводимых компонент многообразия

$$V(f_1, f_2, \dots, f_{i-1}) \subset X\,.$$

В этом случае добавление каждого нового уравнения уменьшает размерность такого подмногообразия в точности на единицу, как показывает

4.10.1. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Если X неприводимо, то $\dim_p V(f) = \dim_p(X) - 1$ для любой непостоянной регулярной функции $f \in \mathscr{O}_X(X)$ и любой точки $p \in V(f)$.*

Доказательство. Мы можем предполагать X аффинным. Фиксируем некоторую конечную сюрьекцию $X \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^m$ и рассмотрим (как при доказательстве утверждения из n° 3.13.1) отображение

$$\varphi = \pi \times f \,:\, X \xrightarrow{x \mapsto (\pi(x), f(x))} \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1 \,.$$

Оно конечно и сюрьективно отображает X на аффинную гиперповерхность $V(\mu_f) \subset \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1$, заданную минимальным полиномом $\mu_f(u,t) = t^n + \alpha_1(u)\, t^{n-1} + \cdots + \alpha_n(u) \in \Bbbk[u_1, u_2, \dots, u_m][t]$ функции f над полем $\Bbbk(\mathbb{A}^m)$. Тогда $V(f) = \varphi^{-1}\,(H \cap V(\mu_f))$, где $H \subset \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1$ — гиперплоскость, заданная уравнением $t = 0$. Но $H \cap V(\mu_f)$ является в аффинном пространстве $H = \mathbb{A}^m$ гиперповерхностью, заданной уравнением $\alpha_n(u) = 0$, и согласно упр. 4.9, имеет размерность $m - 1$. Остаётся применить утверждение из n° 4.8.1 к конечной сюрьекции $V(f) \xrightarrow{\varphi|_{V(f)}} V(a_n)$. □

4.10.2. СЛЕДСТВИЕ. *На произвольном многообразии X для любого $f \in \Bbbk[X]$ в каждой точке $p \in V(f)$ выполнено неравенство $\dim_p V(f) \geqslant \dim_p(X) - 1$.* □

4.10.3. СЛЕДСТВИЕ. *Для любых замкнутых аффинных многообразий $X_1, X_2 \subset \mathbb{A}^n$ в каждой точке $x \in X_1 \cap X_2$ выполняется неравенство*

$$\dim_x(X_1 \cap X_2) \geqslant \dim_x(X_1) + \dim_x(X_2) - n \,.$$

Доказательство. Если $X_1 \xhookrightarrow{\varphi_1} \mathbb{A}^n$, $X_2 \xhookrightarrow{\varphi_2} \mathbb{A}^n$ — замкнутые вложения, то $X_1 \cap X_2$ является прообразом диагонали $\Delta \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ при отображении $X_1 \times X_2 \xhookrightarrow{\varphi_1 \times \varphi_2} \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$. Внутри $X_1 \times X_2$ он задаётся n уравнениями $(\varphi_1 \times \varphi_2)^*(x_i) = (\varphi_1 \times \varphi_2)^*(y_i)$, являющимися поднятиями линейных уравнений $x_i = y_i$, задающих диагональ Δ в $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$. Осталось применить следствие из n° 4.10.2. □

4.10.4. СЛЕДСТВИЕ. *Если замкнутые проективные многообразия $X_1, X_2 \subset \mathbb{P}_n$ удовлетворяют неравенству $\dim(X_1) + \dim(X_2) \geqslant n$, то $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$. Рассмотрим в $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$ аффинные конусы X_1', X_2'' образованные одномерными векторными подпространствами в V, составляющими точки проективных многообразий X_1 и X_2 (эти конусы имеют те же самые уравнения, что и X_1, X_2, но только теперь эти уравнения рассматриваются как аффинные). По предыдущему утверждению

$$\dim_O(X_1' \cap X_2'') \geqslant \dim_O(X_1) + 1 + \dim_O(X_2) + 1 - n - 1 \geqslant 1 \,.$$

Таким образом, $X_1' \cap X_2''$ не исчерпывается точкой O. □

4.11. Теоремы о размерностях слоёв. В алгебраической геометрии, в отличие от дифференциальной геометрии и топологии, размерность прообраза при регулярном отображении контролируется почти столь же жёстко, как в линейной алгебре.

4.11.1. ТЕОРЕМА. *Для любого доминантного морфизма $X \xrightarrow{\varphi} Y$ неприводимых алгебраических многообразий в каждой точке $x \in X$ выполняется неравенство*

$$\dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geqslant \dim X - \dim Y$$

и существует непустое открытое подмножество $U \subset Y$, над которым

$$\dim_x \varphi^{-1}(y) = \dim_x X - \dim_y Y$$

в каждой точке $x \in \varphi^{-1}(y)$ для всех $y \in U$.

Доказательство. Беря композицию нашего отображения с конечным сюрьективным морфизмом какой-нибудь аффинной окрестности точки $\varphi(x)$ на пространство $\mathbb{A}^m$, мы сводим первое утверждение теоремы к случаю $Y = \mathbb{A}^m = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[u_1, u_2, \dots, u_m]$, $\varphi(x) = 0$. Но тогда $\varphi^{-1}(0)$ является пересечением m гиперповерхностей $V(\varphi^*(u_i)) \subset X$, и требуемое неравенство получается индуктивным применением n° 4.10.2.

В доказательстве второго утверждения мы, не ограничивая общности, можем считать оба многообразия аффинными: $X = \operatorname{Spec_m} A$, $Y = \operatorname{Spec_m} B$, а морфизм φ — ограничением проекции $Y \times \mathbb{A}^m \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} Y$ на замкнутое подмногообразие $X \subset Y \times \mathbb{A}^m$ (см. разложение (3-13) из упр. 3.16). Мы собираемся применить к слоям этой проекции следствие n° 4.7.2.

Для этого рассмотрим проективное замыкание $\overline{X} \subset Y \times \mathbb{P}_m$, выберем гиперплоскость $H \subset \mathbb{P}_m$ и точку $p \in \mathbb{P}_m \smallsetminus H$ так, чтобы сечение $Y \times \{p\} \subset Y \times \mathbb{P}_m$ не содержалось в $\overline{X}$. Тогда послойная проекция из p на H будет удовлетворять условиям n° 4.7.1 во всех слоях, располагающихся над открытым подмножеством $U \subset Y$, дополнительным к $\overline{\pi}\Big(\big(Y \times \{p\}\big) \cap \overline{X}\Big)$, где $Y \times \mathbb{P}_m \overset{\overline{\pi}}{\twoheadrightarrow} Y$ — проекция вдоль $\mathbb{P}_m$. Таким образом, заменяя Y его открытым подмножеством U (которое можно выбрать главным, т. е. тоже аффинным), мы можем повторить рассуждения из n° 4.7.2 послойно (одновременно во всех слоях проекции π) и построить конечную сюрьекцию $X \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} Y \times \mathbb{A}^n$, ограничение которой на каждый слой $\varphi^{-1}(y)$ конечно и эпиморфно отображает $\varphi^{-1}(y)$ на $\{y\} \times \mathbb{A}^n$. Конечность ψ влечёт равенство $n = \dim X - \dim Y$, а конечность его ограничений на слои — равенство $\dim_x \varphi^{-1}(y) = n$. □

4.11.2. СЛЕДСТВИЕ (ТЕОРЕМА ШЕВАЛЛЕ О ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ). *Для любого морфизма алгебраических многообразий $X \xrightarrow{\varphi} Y$, множества $X_k \overset{\text{def}}{=} \{\, x \in X \mid \dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geqslant k \,\}$ замкнуты в X при всех $k \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Мы можем предполагать X и Y неприводимыми. Если $\dim Y = 0$ (т. е. Y — точка) теорема тривиально верна для всех k. Пусть теперь $\dim Y = m$ и для всех Y меньшей размерности теорема верна при всех k. Покажем, что она верна для Y. Если $k \leqslant \dim(X) - \dim(Y)$, то $X_k = X$ по предыдущей теореме. Для $k > \dim(X) - \dim(Y)$ заменим Y на $Y' = Y \smallsetminus U$, где U взято из n° 4.11.1, а X — на $X' = \varphi^{-1}(Y')$. Тогда $X_k \subset X'$, $\dim Y' < \dim Y$, и применимо индуктивное предположение. □

Упражнение 4.10. Покажите, что изолированные точки слоёв морфизма $X \xrightarrow{\varphi} Y$ образуют открытое подмножество в X.

4.11.3. СЛЕДСТВИЕ. *Для любого замкнутого морфизма $X \xrightarrow{\varphi} Y$ множество*

$$Y_k \overset{\text{def}}{=} \{\, y \in Y \mid \dim \varphi^{-1}(y) \geqslant k \,\}$$

замкнуто в Y при всех $k \in \mathbb{Z}$. □

4.11.4. СЛЕДСТВИЕ. *Пусть $X \xrightarrow{\varphi} Y$ — замкнутый морфизм с неприводимыми слоями одной и той же размерности. Если Y неприводимо, то X также неприводимо.*

Доказательство. Пусть $X = X_1 \cup X_2$ приводимо. Каждый слой φ, будучи неприводимым, должен целиком содержаться либо в X_1, либо в X_2, т. е. $Y = Y_1 \cup Y_2$, где

$$Y_1 = \{y \in Y \mid \varphi^{-1}(y) \subset X_1\}\,, \quad Y_2 = \{y \in Y \mid \varphi^{-1}(y) \subset X_2\}\,.$$

Поскольку и X_1, и X_2 отличны от X, оба подмножества $Y_1, Y_2 \subset Y$ являются собственными. По предыдущему следствию, оба они замкнуты: Y_i можно описать как множество точек в Y, над которыми слои ограничения $X_i \longrightarrow Y$ имеют максимально возможную размерность. Значит, Y тоже приводимо. □

§5. 27 прямых на гладкой кубической поверхности.

5.1. Прямые на поверхностях. В качестве иллюстрации техники, описанной в предыдущих двух параграфах, исследуем множество прямых, лежащих на двумерной поверхности S заданной степени d в трёхмерном пространстве $\mathbb{P}_3$.

Обозначим через $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^d V^*)$ пространство поверхностей степени d в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ и рассмотрим множество инцидентности между прямыми и поверхностями:

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{ (S, \ell) \in \mathbb{P}_N \times P \mid \ell \subset S \} \subset \mathbb{P}_N \times P .$$

5.1.1. УТВЕРЖДЕНИЕ. Γ *является замкнутым подмногообразием в* $\mathbb{P}_N \times P$.

Доказательство. Линейная оболочка векторов $a, b \in V$ является образом отображения свёртки $V^* \longrightarrow V$, переводящего $\xi \in V^*$ в $\xi \llcorner (a \otimes b - b \otimes a)$. Поэтому прямая (ab) лежит на поверхности $V(F)$, тогда и только тогда, когда $F(\xi \llcorner (a \otimes b - b \otimes a)) = 0$ тождественно по $\xi \in V^*$. Если, как и выше, $a = \sum a_i e_i$, $b = \sum b_i e_i$, а $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, то $\xi \llcorner (a \otimes b - b \otimes a) = \sum\limits_{\nu} \big(\sum\limits_{\mu \neq \nu} (u_\mu v_\nu - u_\nu v_\mu) \xi_\mu \big) \cdot e_\nu$. Обозначая через $p_{\mu\nu} = (u_\mu v_\nu - u_\nu v_\mu)$ плюккеровы координаты прямой (ab), подставляя $x_\nu = \sum\limits_{\mu \neq \nu} p_{\mu\nu} \xi_\mu$ в $F(x)$, раскладывая результат по степеням ξ и приравнивая все коэффициенты этого разложения к нулю, мы получаем явную систему полиномиальных уравнений на коэффициенты F и плюккеровы координаты p_{ij}, описывающую Γ как замкнутое алгебраическое подмногообразие в $\mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_5$. □

5.1.2. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Проекция* $\Gamma \xrightarrow{\pi_2} P$ *сюрьективна, а все её слои являются проективными пространствами размерности* $\frac{1}{6} d(d+1)(d+5) - 1$*; тем самым,* Γ *является неприводимым проективным многообразием размерности* $\frac{1}{6} d(d+1)(d+5) + 3$.

Доказательство. Пусть прямая $\ell \subset \mathbb{P}(V)$ задана уравнениями $x_0 = x_1 = 0$. Тогда $S \supset \ell$, если и только если S задаётся уравнением вида $x_2 \cdot F_2(x) + x_3 \cdot F_3(x) = 0$, в котором $F_2, F_3 \in S^{d-1} V^*$. Такие уравнения образуют векторное пространство W, являющееся образом линейного оператора

$$S^{d-1} V^* \oplus S^{d-1} V^* \xrightarrow{(f,g) \mapsto x_2 f + x_3 g} S^d V^* ,$$

ядро которого состоит из всех (f, g) таких, что $x_2 f = -x_3 g$, т.е. $f = x_3 h$, $g = -x_2 h$ для некоторого $h \in S^{d-2} V^*$. Таким образом, ядро изоморфно $S^{d-2} V^*$, и

$$\dim W = 2 \dim(S^{d-1} V^*) - \dim(S^{d-1} V^*) = \frac{1}{6} \Big(2\, d(d+1)(d+2) - (d-1)d(d+1) \Big) = \frac{1}{6}\, d(d+1)(d+5) .$$

Неприводимость Γ вытекает из n° 4.11.4, а $\dim \Gamma$ вычисляется по n° 4.11.1. □

5.1.3. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Общая*[1] *поверхность* $S_d \subset \mathbb{P}_3$ *степени* $d \geqslant 4$ *не содержит прямых.*

Доказательство. Множество всех поверхностей, содержащих хотя бы одну прямую, совпадает с образом проекции $\Gamma \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{P}_N$. По следствию n° 4.6.3 этот образ является замкнутым неприводимым подмногообразием в $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^d V^*)$. По теореме n° 4.11.1, его размерность пучается вычитанием из $\dim \Gamma$ минимума размерностей непустых слоев проекции π_1. В частности, когда $\dim \Gamma < N$, образ заведомо является собственным подмногообразием. В развёрнутом виде последнее неравенство выглядит как

$$\frac{1}{6}\, d(d+1)(d+5) + 3 < \frac{1}{6}\, (d+1)(d+2)(d+3) , \tag{5-1}$$

и выполняется для всех $d \geqslant 4$. □

5.1.4. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Каждая кубическая поверхность* $S_3 \subset \mathbb{P}_3$ *содержит хотя бы одну прямую, причём для общей кубики множество лежащих на ней прямых конечно.*

[1] т.е. любая из некоторого плотного по Зарисскому открытого подмножества в пространстве всех гиперповерхностей

Доказательство. При $d = 3$ неравенство (5-1) превращается в равенство: в этом случае $\dim\Gamma = N = 19$. Чтобы доказать сюрьективность проекции π_1, достаточно указать хоть один её непустой нульмерный слой — тогда неприводимое замкнутое подмногообразие $\pi_1(\Gamma) \subset \mathbb{P}_{19}$ будет 19-мерным, а стало быть, совпадёт со всем $\mathbb{P}_{19}$.

Выясним, например, какие прямые лежат на проективном замыкании кубики C с аффинным уравнением $xyz = 1$. В рассматриваемой аффинной части прямых вообще нет, поскольку прямая с параметрическим уравнением $x = x_0 + \alpha\, t$, $y = y_0 + \beta\, t$, $z = z_0 + \gamma\, t$ лежит на C, если и только если

$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma = 0 \\ \alpha\beta z_0 + \beta\gamma x_0 + \gamma\alpha y_0 = 0 \\ \alpha y_0 z_0 + \beta x_0 z_0 + \gamma x_0 y_0 = 0 \\ x_0 y_0 z_0 = 1 \end{cases}$$

что невозможно[1]. На бесконечности C задаётся уравнением[2] $x_1x_2x_3 = 0$, т. е. является объединением трёх прямых $x_i = x_0 = 0$ ($i = 1, 2, 3$). □

Упражнение 5.1. Найдите все прямые на кубике Ферма C_F, заданной однородным уравнением $\sum x_i^3 = 0$.
Указание. C_F инвариантна относительно перестановок координат; с точностью до такой перестановки, пара линейных уравнений, задающих прямую $\ell \subset C_F$, приводится методом Гаусса к $x_0 = \alpha x_2 + \beta x_3$, $x_1 = \gamma x_2 + \delta x_3$; подставьте эти значения в уравнение кубики, покажите, что $\alpha\beta\gamma\delta = 0$, а затем найдите их…

5.2. Прямые на гладкой кубике. В оставшейся части этого параграфа мы покажем, что каждая гладкая кубическая поверхность содержит ровно 27 прямых, и точно опишем конфигурацию их попарных пересечений. С этого момента мы фиксируем гладкую кубическую поверхность $S \subset \mathbb{P}_3$, заданную уравнением $F(x) = 0$.

5.2.1. Утверждение. *Всякое приводимое плоское сечение S распадается либо в объединение прямой и гладкой коники, либо в объединение трёх различных прямых.*

Доказательство. Покажем, что плоское сечение $\pi \cap S$ не может содержать двойную прямую. Если такая двойная прямая $\ell \subset \pi \cap S$ имеется, возьмем координаты, в которых плоскость π задаётся уравнением $x_2 = 0$, а ℓ — уравнениями $x_2 = x_3 = 0$. Тогда $F(x) = x_2Q(x) + x_3^2L(x) = 0$ с линейным L и квадратичным Q. Прямая ℓ пересекается с квадрикой $Q(x) = 0$ в некоторой точке a. Тогда $x_2(a) = x_3(a) = Q(a) = 0$ и все частные производные $\partial F/\partial x_i$ равны нулю в точке a, т. е. S особа в a. □

5.2.2. Следствие. *В одной точке поверхности S может пересекаться не более трёх лежащих на S прямых, причём все они должны находиться в одной плоскости.*

Доказательство. Все проходящие через $p \in S$ прямые, лежащие на S, принадлежат $S \cap T_pS$. □

5.2.3. Утверждение. *Для данной прямой $\ell \subset S$ существуют ровно 5 различных плоскостей $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_5$, содержащих ℓ и пересекающих S по тройке прямых. Более того, если $\pi_i \cap S = \ell \cup \ell_i \cup \ell_i'$, то $\ell_i \cap \ell_j = \ell_i \cap \ell_j' = \ell_i' \cap \ell_j' = \varnothing \ \forall\ i \neq j$ (в частности, на S есть скрещивающиеся прямые) и любая лежащая на S прямая, скрещивающаяся с ℓ, при каждом i пересекает ровно одну из двух прямых ℓ_i, ℓ_i'.*

Доказательство. Фиксируем базис $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ в V так, что прямая $\ell = (e_0e_1)$ (заданная уравнениями $x_2 = x_3 = 0$) лежит на S. Тогда уравнение $F(x) = 0$, задающее S, имеет в этом базисе вид

$$L_{00}(x_2,x_3)\cdot x_0^2 + 2\,L_{01}(x_2,x_3)\cdot x_0x_1 + L_{11}(x_2,x_3)\cdot x_1^2 + \\ + 2\,Q_0(x_2,x_3)\cdot x_0 + 2\,Q_1(x_2,x_3)\cdot x_1 + R(x_2,x_3) = 0\,, \quad (5\text{-}2)$$

где $L_{ij}, Q_\nu, R \in k[x_2, x_3]$ являются однородными многочленами степени $1, 2, 3$ соответственно. Запараметризуем пучок плоскостей, проходящих через ℓ, точками $e_\vartheta = \vartheta_2 e_2 + \vartheta_3 e_3 \in (e_2e_3)$ и рассмотрим в плоскости $\pi_\vartheta = (e_0e_1e_\vartheta)$ однородные координаты $(t_0 : t_1 : t_2)$ относительно этих трёх точек. Уравнение

[1] скажем, $\alpha = 0 \Rightarrow (\beta = 0$ или $\gamma = 0) \Rightarrow \beta = \gamma = 0$

[2] мы подставили $x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$, $z = x_3/x_0$, домножили на x_0^3 и положили $x_0 = 0$

плоской коники $(\pi_\vartheta \cap S) \setminus \ell$ получается подстановкой $x = (t_0 : t_1 : \vartheta_2 t_2 : \vartheta_3 t_2)$ в уравнение (5-2) с последующим сокращением на общий множитель t_2. Матрица Грама этой коники в координатах $(t_0 : t_1 : t_2)$ имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} L_{00}(\vartheta) & L_{01}(\vartheta) & Q_0(\vartheta) \\ L_{01}(\vartheta) & L_{11}(\vartheta) & Q_1(\vartheta) \\ Q_0(\vartheta) & Q_1(\vartheta) & R(\vartheta) \end{pmatrix}$$

а её определитель

$$D(\vartheta_2, \vartheta_3) = L_{00}(\vartheta)L_{11}(\vartheta)R(\vartheta) + 2\,L_{01}(\vartheta)Q_0(\vartheta)Q_1(\vartheta)- \\ - L_{11}(\vartheta)Q_0^2(\vartheta) - L_{00}(\vartheta)Q_1^2(\vartheta) - L_{01}(\vartheta)^2R(\vartheta) \in k[\vartheta_2, \vartheta_3] \quad (5\text{-}3)$$

является однородным многочленом от $\vartheta = (\vartheta_2 : \vartheta_3)$ степени 5, и стало быть, обращается в нуль в пяти точках, учтённых с кратностями. Мы должны показать, что все эти кратности равны единице.

Каждый нуль детерминанта (5-3) соответствует вырождению коники в пару прямых, точка пересечения которых лежит либо на ℓ, либо вне ℓ.

В первом случае мы выберем базис так, чтобы эти две прямые были $\ell' = (e_0e_2)$ и $\ell'' = \big(e_0\,(e_1+e_2)\big)$ с уравнениями $x_3 = x_1 = 0$ и $x_3 = (x_1 - x_2) = 0$. Такое вырождение отвечает корню $\vartheta = (1:0)$ уравнения $D(\vartheta_2, \vartheta_3) = 0$, и кратность этого корня равна наибольшей степени ϑ_3, на которую делится $D(\vartheta_2, \vartheta_3)$. Поскольку $\ell, \ell', \ell'' \subset S$, уравнение (5-2) принимает вид

$$x_1x_2(x_1 - x_2) + x_3 \cdot q(x) = 0$$

с квадратичным $q(x)$, и единственными элементами G, не делящимися на ϑ_3, могут быть лишь $L_{11} \equiv x_2 \pmod{\vartheta_3}$ и $Q_1 \equiv -x_2^2/2 \pmod{\vartheta_3}$. Таким образом, $D(\vartheta_2, \vartheta_3) \equiv -L_{00}Q_1^2 \pmod{\vartheta_3^2}$, и этот член имеет порядок 1 по ϑ_3, если и только если мономы $x_1x_2^2$ и $x_0^2x_2$ входят в (5-2) с ненулевыми коэффициентами. Но это действительно так, поскольку первый из них — это единственный моном, который вносит ненулевой вклад в $\partial F/\partial x_1$ в точке $e_2 \in S$, а второй — это единственный моном, который вносит ненулевой вклад в $\partial F/\partial x_2$ в точке $e_0 \in S$.

Во втором случае мы выберем базис так, чтобы $\ell' = (e_0e_2)$, $\ell'' = (e_1e_2)$ задавались уравнениями $x_3 = x_1 = 0$ и $x_3 = x_0 = 0$. Этому вырождению отвечает тот же самый корень $\vartheta = (1:0)$. Теперь (5-2) имеет вид $x_0x_1x_2 + x_3 \cdot q(x) = 0$ и ненулевым по модулю ϑ_3 элементом G является только $L_{01} \equiv x_2/2 \pmod{\vartheta_3}$. Таким образом, $D(\vartheta_2, \vartheta_3) \equiv -L_{01}^2R \pmod{\vartheta_3^2}$ имеет порядок 1 по ϑ_3, если и только если мономы $x_2^2x_3$ и $x_0x_1x_2$ действительно присутствуют в (5-2). Но если бы второй моном не входил в F, то F делится бы на x_3 и кубика была бы приводима (а значит, особа). А первый моном — это единственный моном, дающий ненулевой вклад в $\partial F/\partial x_3$, вычисленную в точке $e_2 \in S$.

Остающиеся утверждения о пересечениях прямых сразу следуют из следствия n° 5.2.2, утверждения n° 5.2.1 и замечания, что каждая прямая в $\mathbb{P}_3$ пересекает любую плоскость. □

5.2.4. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Ни через какие четыре попарно скрещивающиеся лежащие на S прямые нельзя провести квадрику, но для любой такой четвёрки всегда найдётся одна или две (но не более!) прямые, лежащие на S и пересекающие каждую прямую из четвёрки.*

Доказательство. Если четыре попарно скрещивающиеся прямые на S лежат на квадрике, то это — гладкая квадрика Сегре из §5, заметаемая двумя семействами прямолинейных образующих, и наша четвёрка прямых находится в одном из этих семейств. Но тогда все прямые другого семейства (а стало быть, и сама квадрика) лежат на S, ибо всякая прямая, проходящая через 4 различных точки S, лежит на S целиком. Тем самым, поверхность S приводима, и значит, особа. □

5.3. Конфигурация 27 прямых. Зафиксируем на S пару скрещивающихся прямых a, $b \subset S$ и построим 5 пар прямых ℓ_i, ℓ_i', ассоциированных по утверждению из n° 5.2.3 с прямой $\ell = a$, причём в каждой паре обозначим через ℓ_i ту прямую, которая пересекает b, а через ℓ_i' — ту, которая скрещивается с b. Далее, обозначим через ℓ_i'' ещё 5 прямых, образующих вместе с прямыми ℓ_i пять пар прямых, ассоциированных по утверждению из n° 5.2.3 с $\ell = b$. Таким образом, каждая из прямых ℓ_i'' пересекается с b, но скрещивается с a и со всеми ℓ_j с $j \neq i$, и стало быть, пересекает все ℓ_j' с $j \neq i$.

Любая прямая $c \subset S$, отличная от 17 только что названных, скрещивается и с a, и с b, но при каждом i пересекает ровно одну из двух прямых ℓ_i, ℓ_i'. Из утверждения n° 5.2.4 вытекает, что прямая c не может пересекать $\geqslant 4$ прямых ℓ_i, поскольку все такие прямые исчерпываются парой прямых a, b. По аналогичной причине c не может пересекать и $\leqslant 2$ прямых ℓ_i — в противном случае, переставляя при необходимости индексы, мы можем считать, что c пересекает ℓ'_1, ℓ'_2, ℓ'_3 и ещё либо ℓ'_4, либо ℓ_5, но в обоих случаях этим свойством уже обладают a и ℓ''_5.

Итак, всякая лежащая на S прямая c, отличная от 17 прямых a, b, ℓ_i, ℓ'_i, ℓ''_i, пересекает в точности 3 прямые ℓ_i. Покажем, что на S имеется ровно 10 таких прямых, взаимно однозначно соответствующих $\binom{5}{3} = 10$ тройкам $\{i < j < k\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Действительно, для каждой тройки прямых ℓ_i имеется самое большее одна прямая c, отличная от a, и пересекающая заданные три прямые ℓ_i и оставшиеся прямые ℓ'_j (поскольку все 5 попарно скрещиваются). С другой стороны, по утверждению n° 5.2.3, для каждого i на S лежит ровно 10 прямых, пересекающих ℓ_i — это 4 прямых a, b, ℓ'_i и ℓ''_i, а оставшиеся 6 должны, как мы знаем, пересекать ещё ровно две из оставшихся четырех прямых ℓ_j. Но таких пар и имеется ровно $\binom{4}{2} = 6$, что и приводит к требуемому взаимно однозначному соответствию между прямыми c и тройками (i, j, k).

5.3.1. ТЕОРЕМА. *Каждая гладкая кубическая поверхность $S \subset \mathbb{P}_3$ содержит ровно 27 прямых, причём комбинаторика их попарных пересечений на всех S одинакова.* □

Упражнение 5.2. Найдите порядок подгруппы $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{S}_{27}$, состоящей из всех перестановок 27 прямых, сохраняющих все их попарные пересечения. (ответ: $|\mathfrak{G}| = 51\,840 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$)

Упражнение 5.3*. Рассмотрим поле из 4 элементов: $\mathbb{F}_4 \overset{\text{def}}{=} \mathbb{F}_2[\omega]/(\omega^2+\omega+1)$, где $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Подобно расширению $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, расширение $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_4$ обладает автоморфизмом сопряжения: $z \longmapsto \overline{z} \overset{\text{def}}{=} z^2$, который оставляет на месте подполе $\mathbb{F}_2$ и переставляет друг с другом пару корней многочлена $\omega^2+\omega+1$. Покажите, что проективная унитарная группа[1] $\mathbb{P}\mathrm{U}_4(\mathbb{F}_4)$ канонически вкладывается в группу $\mathfrak{G}$ из упр. 5.2 как (нормальная) подгруппа индекса 2.

Указание. Группа $\mathbb{P}\mathrm{U}_4(\mathbb{F}_4)$ сохраняет кубику Ферма C_F из упр. 5.1, поскольку кубическая форма Ферма над $\mathbb{F}_4$ превращается в эрмитову форму $\sum x_i\overline{x}_i$.

[1] т. е. фактор группы матриц $M \in \mathrm{Mat}_{4\times4}(\mathbb{F}_4)$, таких что $\overline{M}M^t = E$, по подгруппе скалярных матриц