27 прямых.

АГ3◇1. Покажите, что на каждой кубической поверхности в $\mathbb{P}_3$ лежит хоть одна прямая.

АГ3◇2. Может ли гладкая кубическая поверхность $S \subset \mathbb{P}_3$ иметь плоское сечение, распадающееся в объединение гладкой коники и ее касательной?

АГ3◇3. Покажите, что в пучке плоскостей, проходящих через заданную прямую ℓ, лежащую на гладкой кубической поверхности $S \subset \mathbb{P}_3$, имеется ровно 5 различных плоскостей $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_5$, пересекающих S по тройке прямых.

АГ3◇4. Зафиксируем на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ шестёрку точек $\{p_1, p_2, \dots, p_6\}$, так чтобы никакие три из них не были коллинеарны и ни одна не лежала бы на квадрике, проходящей через 5 других. Обозначим через $W = \{F \in S^3V^* \mid F(p_i) = 0 \ \forall\, i = 1, 2, \dots, 6\}$ пространство кубических форм на V, задающих кривые, проходящие через наши 6 точек. Рассмотрим отображение

$$\mathbb{P}_2 \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_6\} \xrightarrow{\ \psi\ } \mathbb{P}(W^*)\,, \qquad (*)$$

которое отправляет точку $p \notin \{p_1, p_2, \dots, p_6\}$ в подпространство коразмерности 1 в W, образованное всеми кубическими формами из W, зануляющимися в точке p. Покажите, что

а) $\dim W = 4$. **б)** $S = \overline{\psi\left(\mathbb{P}_2 \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_6\}\right)}$ есть кубическая поверхность в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(W^*)$.

в) Отображение $(*)$ продолжается до регулярного изоморфизма $\sigma^{-1}_{p_1,p_2,\dots,p_6}\mathbb{P}_2 \xrightarrow{\ \sim\ } S$ между S и раздутием $\mathbb{P}_2$ в заданных 6 точках.

г) Явно опишите 27 пучков плоских кубических кривых, проходящих через $p_1, p_2, \dots, p_6$, которые переводятся изоморфизмом $(*)$ в 27 прямых на S.

АГ3◇5 (двойная шестёрка Шлефли). Рассмотрим в $\mathbb{P}_3$ шесть прямых $[0], [1], \dots, [5]$, таких что прямые $[1], \dots, [5]$ попарно скрещиваются между собой и ни одна из них не касается и не лежит на квадрике, проведенной через любые 3 другие, а прямая $[0]$ пересекается со всеми пятью прямыми $[1], \dots, [5]$. Докажите, что:

а) $\forall\, i = 1, \dots, 5$ существует единственная прямая $[i'] \neq [0]$ такая, что $[i'] \cap [j] \neq \varnothing \ \forall\, j \neq i$;

б) $[i'] \cap [i] = [i'] \cap [j'] = \varnothing$ для всех $i = 1, \dots, 5$ и для всех $j \neq i$;

в) ни одна из прямых $[1'], \dots, [5']$ не касается и не лежит на квадрике, проходящей через какие-нибудь 3 другие из этих прямых;

г) существует единственная прямая $[0']$, которая пересекает каждую из $[1'], \dots, [5']$

Указание. Пусть $[0_1'] \neq [1]$ и $[0_2'] \neq [2]$ – прямые, которые пересекают все $[1'], \dots, [5']$, кроме $[1']$ и $[2']$ соответственно; покажите, что они имеют одни и те же точки пересечения p_3, p_4, p_5 с $[3'], [4'], [5']$, которые могут быть восстановлены геометрически, используя только прямые $[3], [4], [5], [3'], [4'], [5']$, и $[0]$.

АГ3◇6. Покажите, что двойная шестёрка прямых из предыдущей задачи лежит на некоторой гладкой кубической поверхности и объясните, как получить ещё 15 прямых, лежащих на этой же кубике.

АГ3◇7. Напишите явные уравнения 27 прямых на комплексной кубике Ферма

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0\,.$$

АГ3◇8. Обозначим через $z \longmapsto \overline{z} = z^2$ автоморфизм Фробениуса поля[1] $\mathbb{F}_4$ над полем $\mathbb{F}_2$ и рассмотрим «унитарную группу» $U_4(\mathbb{F}_4) \subset \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{F}_4)$, состоящую из всех квадратных 4×4-матриц M с элементами из $\mathbb{F}_4$, таких что $M^t \cdot \overline{M} = E$. Покажите, что группа $U_4(\mathbb{F}_4)$ образует нормальную подгруппу индекса 2 в группе всех тех перестановок 27 прямых на гладкой кубической поверхности, которые охраняют свойство любых двух прямых пересекаться или не пересекаться друг с другом (т. е. сохраняют матрицу инцидентности между прямыми). Найдите порядки обеих групп.

[1] напомню, что поле $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[x]/(x^2+x+1)$ состоит из элементов вида $a + b\omega$, где $a, b \in \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/(2)$, и $\omega^2 = \omega^{-1} = \omega + 1$

Несколько дополнительных задач

АГ3◇9*. Покажите, что любая гладкая кубическая поверхность $S \subset \mathbb{P}_3$ может быть задана в подходящей координатной системе уравнением $\varphi_1\varphi_2\varphi_3+\psi_1\psi_2\psi_3 = 0$, где φ_i и ψ_j суть линейные однородные формы.

АГ3◇10. Пусть функции $f_1, f_2, \dots, f_n$ на аффинном алгебраическом многообразии X таковы, что главные открытые множества $\mathscr{D}(f_\nu)$ покрывают X. Обозначим через $\Lambda^\nu = \Lambda^\nu\Bbbk^n$ ν-тую компоненту внешней алгебры n-мерного векторного пространства $\Bbbk^n$, базис в котором обозначим через $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Покажите, что последовательность $\Bbbk[X]$-модулей

$$0 \longrightarrow \Lambda^n \otimes \Bbbk[X] \longrightarrow \Lambda^{n-1} \otimes \Bbbk[X] \longrightarrow \;\cdots\; \longrightarrow \Lambda^1 \otimes \Bbbk[X] \longrightarrow \Lambda^0 \otimes \Bbbk[X] \longrightarrow 0\,,$$

дифференциал в которой действует по правилу

$$\omega \otimes g \mapsto \sum \frac{\partial\omega}{\partial\xi_i} \otimes f_i \cdot g\,,$$

точна.

АГ3◇11*. Всякий ли простой идеал кольца $\mathscr{C}^0\big([\,0\,,\,1\,]\big)$ вещественных непрерывных функций на отрезке максимален?

АГ3◇12* (теорема Безу для плоских кривых). Пусть кривые C и D на $\mathbb{P}_2$ не имеют общих неприводимых компонент и задаются уравнениями $F = 0$ и $G = 0$, где $F, G \in \Bbbk[x_0, x_1, x_2]$ однородны степени n и m соответственно. Обозначим через

$$K = \Bbbk[a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2] = \Bbbk[a, b]$$

кольцо многочленов от двух наборов переменных $a = (a_0, a_1, a_2)$ и $b = (b_0, b_1, b_2)$ и рассмотрим многочлены $f_{ab}(\lambda,\mu) = F(\lambda a+\mu b)$ и $g_{ab}(\lambda,\mu) = G(\lambda a+\mu b)$, которые получаются подстановкой в F и G вместо x линейной комбинации $\lambda a + \mu b$, и которые мы будем воспринимать как однородные многочлены степеней n и m от переменных $(\lambda : \mu)$ с коэффициентами в кольце K. Обозначим через $R = R(a, b) \in K$ результант этих двух многочленов. Покажите, что разложение R на неприводимые множители в кольце K имеет вид

$$R(a,b) = \text{const}\;\cdot \prod_{w\in C_1\cap C_2} \det \begin{pmatrix} w_0 & w_1 & w_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix}^{m_u}$$

в котором кратности m_u вычисляются по следующему *правилу Цойтена*. Выберем на $\mathbb{P}_2$ базис p, u, w так, чтобы $p, u \notin C_1\cap C_2$, а $w \in C_1\cap C_2$ была единственной точкой прямой (pu), лежащей в пересечении $C_1\cap C_2$. Запараметризуем пучок прямых, проходящих через p, точками прямой (w, u), рассмотрим на этой прямой переменную точку $q(t) = w + t\,u$, стремящуюся к w при $t \to 0$, и обозначим соответствующую переменную прямую пучка через $\ell(t) = (p, q(t))$. Пусть[2]

$$C_1 \cap \ell(t) = \{\alpha_0(t), \alpha_1(t),\, \dots\,, \alpha_n(t)\}$$
$$C_2 \cap \ell(t) = \{\beta_0(t), \beta_1(t),\, \dots\,, \beta_m(t)\}$$

и $\alpha_1(t), \alpha_2(t),\, \dots\,, \alpha_s(t)$ и $\beta_1(t), \beta_1(t),\, \dots\,, \beta_r(t)$ суть все те из них, что сливаются в точке w, когда $t \to 0$ и $q(t) \to w$. Тогда кратность m_w равна кратности корня $t = 0$ результанта R, рассматриваемого как многочлен от t, и над полем $\Bbbk = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ может быть вычислена как сумма порядков[3] rs бесконечно малых величин $\alpha_i(t) - \beta_j(t)$.

Покажите, что R однороден степени mn по каждой из двух групп переменных a, b и выведите из предыдущего, что

$$mn = \sum_{w\in C_1\cap C_2} m_w$$

(число m_w называется *локальной кратностью пересечения* кривых C_1 и C_2 в точке w).

---

[2] отметим, что эти точки суть корни многочленов $f_{p,q(t)}(\lambda,\mu)$ и $g_{p,q(t)}(\lambda,\mu)$, и когда t меняется, они рисуют кривые C_1 и C_2

[3] по t при $t \to 0$