ЗАДАЧКИ ПО ГЕОМЕТРИИ

Если не оговорено особо, то мы считаем что все проективное и комплексное и даже гладкое (не важно что это). Если сложно работать с комплексными числами (представлять комплексную кривую например), то считайте что все вещественно.

Буквами x, y, z мы будем как правило обозначать проективные координаты на $\mathbb{P}^2$. Но не всегда, иногда аффинные координаты на $\mathbb{C}^3$.

1. Вторник, 16 августа

Задачка 1.1. Пусть $\pi\colon \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \to \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ — инверсия в окружности с центром в точке $(0,0)$ радиуса $R > 0$. Проверьте что

$$\pi(x,y) = \left(\frac{xR^2}{x^2+y^2}, \frac{yR^2}{x^2+y^2}\right)$$

для любой $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Покажите и проверьте (любым способом) что π переводит прямые в окружности, окружности в окружности или прямые, а общие коники в некоторые вещественные кривые степени 4. Рассмотрите π как рациональное отображение $\mathbb{C}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}^2$, продолжите его до рационального отображения $\mathbb{CP}^2 \dashrightarrow \mathbb{CP}^2$ и найдите его точки неопределенности. Подумайте, верно ли что группа $\mathrm{Bir}(\mathbb{RP}^2)$ порождена инволюцией π, стандартной инволюцией Кремоны и подгруппой $\mathrm{Aut}(\mathbb{RP}^2) \cong \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$.

Задачка 1.2. Покажите что $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}[L]$, где $[L]$ — класс прямой на $\mathbb{P}^2$. Используйте (без доказательства) тот факт что любая неприводимая кривая на $\mathbb{P}^2$ задается нулями одного неприводимого однородного многочлена (а степенью кривой в этом случае называют просто степень этого многочлена).

Задачка 1.3. Найдите особые точки кривых на $\mathbb{P}^2$, которые заданны уравнениями $zx^2 = y^3$ и $x^d + y^d = z^d$. Покажите что эти кривые неприводимы. Найдите пересечения этих кривых с какой нибудь прямой в $\mathbb{P}^2$.

Задачка 1.4. Пусть L — прямая в $\mathbb{P}^2$, и пусть C — неприводимая кривая в $\mathbb{P}^2$ степени d. Покажите что L пересекает C по d точкам, посчитанным с кратностями (определите как нибудь эти кратности).

Задачка 1.5. Пусть Q — любая гладкая квадрика в $\mathbb{P}^3$. Докажите что через каждую точку Q проходит ровно 2 прямых (например, попробуйте доказать это для какой-то квадрики и какой-то конкретной точки на ней, а потом убедите себя что этого достаточно).

Задачка 1.6. Пусть Q — квадрика в $\mathbb{P}^3$, пусть P — нектороая точка в Q, и пусть Π — некоторая плоскость в $\mathbb{P}^3$. Определите проекцию Q их точки P на плоскость Π. Пусть $\pi\colon Q \dashrightarrow \Pi \cong \mathbb{P}^2$ — построенное отображение. Опишите множество $\pi(Q \setminus P)$ и его замыкание (точка P не обязательно гладкая точка на Q!). Докажите что π бирационально если $P \notin \mathrm{Sing}(Q)$ (то есть точка P неособа на Q (гладкая точка кадрики Q). А именно, попробуйте найти явно открытое по Зарискому (дополнение к подмногообразию в Q) подмножество $U \subset Q$ такое что π индуцирует изоморфизм U и некоторого открытого по Зарискому подмножества $V \subset \mathbb{P}^2$.

Задачка 1.7. Пусть S — поверхность в $\mathbb{C}^3$, заданная уравнением $zx = y$, и пусть $\pi\colon S \dashrightarrow \mathbb{C}^2$ — морфизм, индуцированный проецией $(x, y, z) \to (x, y)$. Опишите образ π и слои π над всеми точками образа.

Задачка 1.8. Пусть S — поверхность в $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^2$, заданная уравнением $x\alpha = y\beta$, где (x, y) — аффинные координаты на $\mathbb{C}^2$, а $[\alpha : \beta]$ — поективные координаты на $\mathbb{P}^1$. Пусть $\pi\colon S \dashrightarrow \mathbb{C}^2$ — морфизм, индуцированный естественной проецией $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{C}^2$. Пусть E слой π над точкой $(0, 0)$. Покажите что $E \cong \mathbb{P}^1$. Докажите что π индуцирует биекцию (и изоморфизм) $S \setminus E \to \mathbb{C}^2 \setminus (0, 0)$.

Задачка 1.9. Бирациональный морфизм построенный в задачке 1.8 называется раздутием $\mathbb{C}^2$ в точке $(0, 0)$. Попробуйте придумать определение для раздутия $\mathbb{C}^n$ в точке, а потом и в линейном подпространстве. Проверьте вашу конструкцию в случае раздутий $\mathbb{C}^3$ в точке и прямой. Найдите слои построенных бирациональных морфизмов.

Задачка 1.10. Пусть $\pi\colon S \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ — раздутие $\mathbb{P}^2$ в некоторой точке P, пусть L_1 и L_2 — две различные прямые на плоскости $\mathbb{P}^2$, которые пересекаются в точке P. Пусть $\bar{L}_i$ — собственный прообраз на S прямой L_i (то есть замыкание множества $\pi^{-1}(L_i \setminus P)$ в поверхности S (в любой естественной топологии)) для $i = 1$ и $i = 2$. Покажите что $\bar{L}_1$ и $\bar{L}_2$ не пересекаются (см. картинку на четвертой странице).

Задачка 1.11. Пусть $\pi\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ отображение, заданной линейной системой всех коник на $\mathbb{P}^2$, которые проходят через точки $[1 : 0 : 0]$ и $[0 : 1 : 0]$. Покажите что π определено вне точек $[1 : 0 : 0]$ и $[0 : 1 : 0]$, но π стягивает прямую $z = 0$ в точку. Пусть Q — замыкание множества

$$\pi\Bigg(\mathbb{P}^2 \setminus \Big\{\big[1 : 0 : 0\big], \big[0 : 1 : 0\big]\Big\}\Bigg)$$

в $\mathbb{P}^3$. Покажите что Q — неособая квадрика, и π индуцирует бирациональное отображение $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow Q$.

Задачка 1.12. Пусть $\pi\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow Q$ — отображение построенное в задачке 1.11 (для простоты мы используем ту же букву π что и для построенного в задачке 1.11 отображения $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$, надеемся это никого не смутит). Пусть $\alpha\colon S \to \mathbb{P}^2$ — раздутие (сразу двух) точек $[1 : 0 : 0]$ и $[0 : 1 : 0]$ (то есть композиция раздутий на самом деле). Покажите что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ \mathbb{P}^2 \arrow[rr, dashed, "\pi"'] & & Q, \end{tikzcd}$$

где β — некоторый бирациональный морфизм (везде определенный). То есть мы разрешили неопределенности отображения π с помощью раздутий точек $[1 : 0 : 0]$ и $[0 : 1 : 0]$.

Задачка 1.13. Воспользуемся обозначениями задачки 1.12. Пусть L — прямая на $\mathbb{P}^2$, проходящая через точки $[1 : 0 : 0]$ и $[0 : 1 : 0]$. Пусть $\bar{L}$ — её собственный прообраз на S. Покажите что β стягивает $\bar{L}$ в точку и индуцирует биекцию $S \setminus \bar{L} \to Q \setminus \beta(\bar{L})$, которая является изоморфизмом (это не надо показывать). Сравните картинку с задачкой 1.6.

Задачка 1.14. Пусть $\iota\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ — стандартная инволюция Кремоны, то есть отображение заданное как $\iota([x : y : z]) = [yz : xz : xy]$ для всех точек $[x : y : z] \in \mathbb{P}^2$. Разложите ι в копозицию раздутий и сдутий (сравните решение с решением задачки 1.13).

Задачка 1.15. Пусть $\pi\colon S \to \mathbb{C}^2$ — раздутие точки $(0,0)$, пусть E — исключительная кривай раздутия π (то есть кривая $\pi^{-1}(0,0) \cong \mathbb{P}^1$), пусть C — афинная кривая в $\mathbb{C}^2$, заданная уравнением $x^2 = y^3$, и пусть Z — афинная кривая в $\mathbb{C}^2$, заданная уравнением $x^2 = y^2$. Пусть $\bar{C}$ — собственный прообраз кривой C на поверхности S (то есть замыкание множества $\pi^{-1}(C \setminus (0,0))$ в поверхности S. Покажите что кривая $\bar{C}$ неособо. Покажите что $\bar{C}$ пересекает E в одной точке (и касается в ней). Проделайте аналогичные вычисления с кривой Z и сравните полученные рузультаты).

Задачка 1.16. Найдите 27 прямых на кубической поверхности $S \subset \mathbb{P}^3$, которая заданна уравнением $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0$ (тут $[x : y : z : t]$ — проективные координаты на $\mathbb{P}^3$). Покажите что S неособа. Погуглите "27 прямых" (have fun).

Задачка 1.17. Найдите 27 прямых на кубической поверхности $S \subset \mathbb{P}^3$, которая заданна уравнением $2x^3 + 3y^3 + 5z^3 + 7t^3 = 0$ по аналогии с задачкой 1.16. Обозначим эти прямые как $L_1, \ldots, L_{27}$ и рассмотрим S как поверхность над $\mathbb{Q}$. Попробуйте показать что $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ действует на множестве $\{L_1, \ldots, L_{27}\}$ транзитивно. Если это и не так, то покажите что не существует орбиты из несвязного объединения прямых.

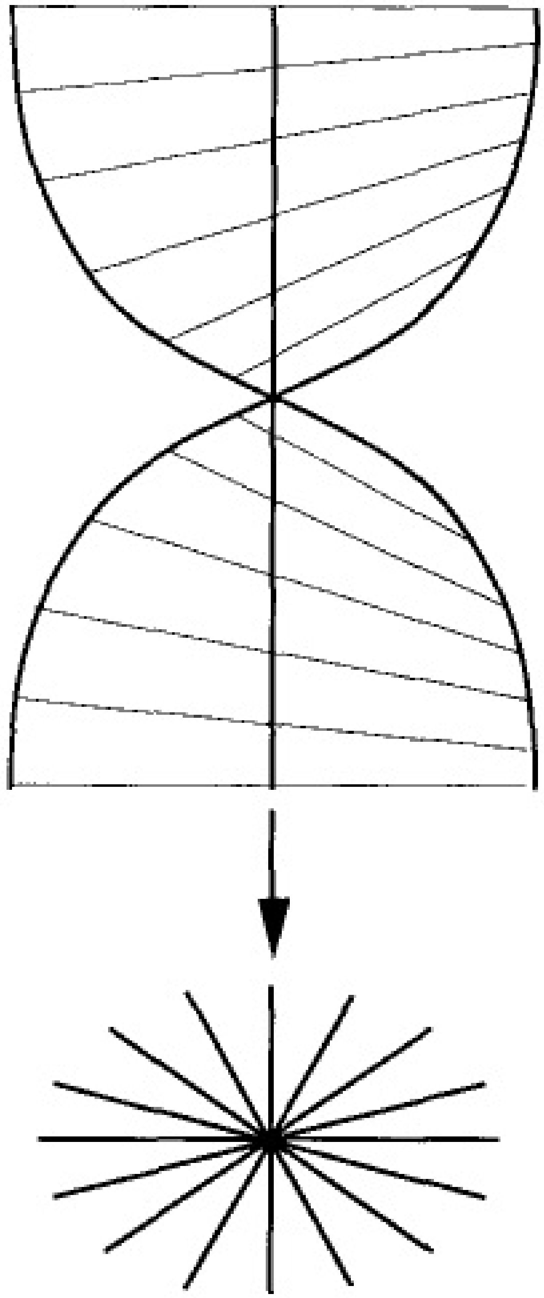
Задачка 1.18. Привидите пример особой кубической поверхности $S \subset \mathbb{P}^3$. Пусть P — особая точка поверхности S. Покажите что через P проходит прямая, содержащаяся в S. Раздуйте $\mathbb{P}^3$ в P, рассмотрите собственный прообраз S на раздутии. Проверьте гладкая ли получилась поверхность. Если нет, то повторите все заново с новой особой кубической поверхностью. Продолжайте пока не получите гладкую поверхность на раздутии.

Задачка 1.19. Опишите все возможные особенности квадрик в $\mathbb{P}^3$. Пораздувайте $\mathbb{P}^3$ в особых точках этих квадрик.

Задачка 1.20. Пусть X — аффинная гиперповерхность (трифолд) в $\mathbb{C}^4$, которая заданна уравнением $t^2 = xyz$ (тут (x, y, z, t) — аффинные координаты в $\mathbb{C}^4$). Раздуйте $\mathbb{C}^4$ в точке $(0, 0, 0, 0)$, рассмотрите собственный прообраз X на раздутии. Проверьте что получилось. О чем нам это говорит?

Задачка 1.21. Пусть $\mathcal{M}$ — линейная система всех коник на $\mathbb{P}^2$, которые проходят через три некопланарные точки (то есть не лежащие на одной прямой). Покажите что проективная размерность $\mathcal{M}$ есть 2 и $\mathcal{M}$ задает отображение $\pi\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ (возможно потребуется применить теорему Безу). Покажите что π является композицией стандартной инволюции Кремоны (см. задачку 1.14) и проективного автоморфизма из $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2) \cong \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$.

Задачка 1.22. Пусть C и Z две неприводимые кубические кривые, которые пересекаются по 9 точкам. Обозначим эти точки как $P_1, \ldots, P_9$. Пусть $\mathcal{M}$ — линейная система всех кубик на $\mathbb{P}^2$, которые проходят через точки $P_1, \ldots, P_8$. Покажите проективная размерность $\mathcal{M}$ есть 1 (то есть $\mathcal{M}$ есть пучок по определению) и $\mathcal{M}$ задает отображение $\pi\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ (точно потребуется применить теорему Безу, причем несколько раз). Последнее просто значит что точки $P_1, \ldots, P_9$ накладывают независимые линейные условия на кубические формы от трех переменных. Покажите что любая кивая в $\mathcal{M}$ содержит точку P_9. Используйте этот факт для показательства теоремы Паскаля (если не знаете что это такое то погуглите).



2. Среда, 17 августа

Задачка 2.1. Пусть S — поверхность в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$, заданная уравнением

$$f(x, y, z)\alpha + g(x, y, z)\beta = 0,$$

где $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ — линейно независимые линейные формы, $[x : y : z]$ — проективные координаты на $\mathbb{P}^1$, а $[\alpha : \beta]$ — поективные координаты на $\mathbb{P}^1$. Убедитесь, что S корректно определена. Покройте $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ аффинными картами такими, что в этих картах соответствующий кусок поверхности S является гиперповерхностью. Покажите что поверхность S неособа (воспользуйтесь тем что аффинная гиперповерхность неособа тогда и только тогда когда все частные производные задающего её многочлена не имеют нулей на этой гиперповерхности). Покажите что S является раздутием $\mathbb{P}^2$ в точке и сравните полученную геометрическую картинку с рисунком на предыдущей странице.

Задачка 2.2. Пусть $\pi\colon S \to \mathbb{C}^2$ — раздутие точки $O = (0, 0)$, пусть E — исключительная кривая раздутия π (то есть кривая $\pi^{-1}(0, 0) \cong \mathbb{P}^1$), пусть C — афинная кривая в $\mathbb{C}^2$, заданная уравнением

$$f_m(x, y) + f_{m+1}(x, y) + f_{m+2}(x, y) + \cdots + f_d(x, y) = 0,$$

где $f_i(x, y)$ — однородный многочлен степени m. Если $f_m(x, y)$ не нулевой многочлен, то число m принято называть кратностью C в точке O и обозначать символом $\mathrm{mult}_O(C)$. Пусть $\bar{C}$ — собственный прообраз кривой C на поверхности S. Попробуйте определить дивизор $\pi^*(C)$ (не класс) как кривую (возможно приводимую и неприведенную), которая задается тем же уравнением, что и C только в соответствующей аффинной карте раздутия (см. задачки 1.7 и 1.8). Покажите, что $\pi^*(C) = \bar{C} + \mathrm{mult}_O(C)E$. Убедите себя, что аналогичная формула верна для раздутия проективной поверхности в точке с заменой значка равенства $=$ на значок рациональной эквивалентности $\sim$.

Задачка 2.3. Пусть S — неособая поверхность, пусть P — точка на ней, пусть $\pi\colon \tilde{S} \to S$ — раздутие поверхности S в точке P, пусть C и Z — две различные неприводимые кривые на поверхности S, и пусть $\tilde{C}$ и $\tilde{Z}$ — собственные прообразы кривых C и Z на поверхности S, соответственно. Покажите что

$$C \cdot Z \geqslant \mathrm{mult}_P\Big(C \cdot Z\Big) = \mathrm{mult}_P\big(C\big)\mathrm{mult}_P\big(Z\big) + \sum_{Q \in E \cap \tilde{C} \cap \tilde{Z}} \mathrm{mult}_Q\Big(\tilde{C} \cdot \tilde{Z}\Big) \geqslant \mathrm{mult}_P\big(C\big)\mathrm{mult}_P\big(Z\big),$$

где $\mathrm{mult}_P(C)$, $\mathrm{mult}_P(Z)$, $\mathrm{mult}_Q(\tilde{C})$ и $\mathrm{mult}_Q(\tilde{Z})$ — кратности кривых C, Z, $\tilde{C}$ и $\tilde{Z}$ в точках P и Q, соответственно. Если не знаете что такое кратность кривой в точке, попробуйте определить её сами (см. задачку 2.2).

Задачка 2.4. Пусть S — неособая поверхность, а Z — произвольная поверхность (необязательно неособая). Предположим, что существует бирациональное отображение $\psi\colon S \dashrightarrow Z$. Вложим Z в $\mathbb{P}^n$ (произвольным способом). Пусть $\mathcal{H}$ — линейная система всех гиперплоских сечений поверхности Z. Определим собственный прообраз линейной системы $\mathcal{H}$ на поверхности S как линейную систему, не имеющую неподвижных кривых, общая кривая в которой состоит из собственных прообразов общей кривой в $\mathcal{H}$. Обозначим эту линейную систему символом $\mathcal{M}$. Убедите себя, что ψ — рациональное отображение, заданное линейной системой $\mathcal{M}$, а саму линейную систему $\mathcal{M}$ можно задать посредством нулей на S рациональных функций из $\mathcal{H}$ (если рассматривать линейную систему $\mathcal{H}$ как конечномероное векторное подпространство поля рациональных функций), не забывая вычесть откуда надо возможные базиные кривые. Воспользуйтесь задачкой 2.3 для токазательства того, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \tilde{S} \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ S \arrow[rr, dashed, "\pi"'] & & Z, \end{tikzcd}$$

где β — композиция раздутий точек неособых поверхностей.

Задачка 2.5. Пусть S — неособая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$, пусть L — прямая на ней, и пусть $\mathcal{M}$ — линейная система гиперплоских сечений поверхности S, проходящих через прямую L. Покажите, что $L\cdot L=-1$ на поверхности S, опишите базисное множество линейной системы $\mathcal{M}$, и опишите рациональное отображение, заданной линейной системой $\mathcal{M}$.

Задачка 2.6. Пусть S — неособая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$, пусть P — точка на ней, которая не лежит ни на какой прямой в S, и пусть $\mathcal{M}$ — линейная система гиперплоских сечений поверхности S, проходящих через точку P. Покажите, что базисное множество линейной системы $\mathcal{M}$ состоит из точки P (это очевидно), и опишите рациональное отображение, заданной линейной системой $\mathcal{M}$. А именно, покажите что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \tilde{S} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\ S \arrow[rr, dashed, "\phi"'] & & \mathbb{P}^2, \end{tikzcd}$$

где ϕ — рациональное отображение, заданной линейной системой $\mathcal{M}$, π — раздутие точки P, а η — двулистное накрытие (слой η над каждой точкой в $\mathbb{P}^2$ состоит из не более двух точек, а слой η над общей точкой в $\mathbb{P}^2$ состоит ровно из двух точек). Опишите кривую ветвление двулистного накрытия η (выразите уравнение этой кривой через уравнение поверхности S).

Задачка 2.7. Воспользуемся обозначениями и предположениями задачки 2.7. Пусть T — единственное гиперплоское сечение поверхности S, имеющее особенность в точке P. Покажите, что T — неприводимая кривая (воспользуйтесь тем, что P не лежит ни на какой прямой в S). Пусть $\tilde{T}$ — собственный прообраз кривой T на поверхности $\tilde{S}$, пусть E — исключительная кривая раздутия π, и пусть τ — бирегулярная инволюция поверхности $\tilde{S}$, которая индуцирована двелистным накрытием η (инволюция τ индуцирует небирегулярную инволюцию в $\mathrm{Bir}(S)$, которую принято называть инволюцией Гейзера). Покажите, что

$$\tau^*\Big(\pi^*\big(-K_S\big)\Big)\sim\pi^*\big(-2K_S\big)-3E$$

воспользовавшись тем, что $\tau(\bar{T})=E$ (подумайте почему это так).

Задачка 2.8. Воспользуйтесь Атласом простых групп и их представлений и покажите что существует конечная подгруппа G в группе $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2)\cong\mathbb{PGL}_3(\mathbb{C})$, которая изоморфна группе A_6 (группа четных перестановок шести элеменов). Покажите, что любая G-орбита в $\mathbb{P}^2$ состоит не менее чем из 9 точек (на самом деле, 9 тут не оптимальная оценка). Воспользуйтесь тем фактом что стабилизатор точки точно линейно действует на ее касательном пространстве.

Задачка 2.9. У группы $\mathbb{A}_5$ (группа четных перестановок пяти элеменов или группа вращений икосаэдра) существует ровно два неизоморфных неприводимых трехмерных комплексных представления (см. Атлас простых групп и их представлений). Эти представления задают точные действия $\mathbb{A}_5$ на $\mathbb{P}^2$, которые в свою очередь задают подгруппы в группе $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{PGL}_3(\mathbb{C})$, которые изоморфны группе A_5. Покажите что эти действия несопряжены, но можно считать, что оба действия задают одну и ту же подгруппу в $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2)$, поскольку трехмерные неприводимые представления группы $\mathbb{A}_5$ отличаются на внешний автоморфизм. Пусть Σ — G-орбита в $\mathbb{P}^2$, которая состоит менее чем из 9 точек. Покажите, что Σ состоит ровно из 6 точек и что такая орбита единственна (ср. с задачкой 2.8). Попробуйте геометрически объяснить как Σ связяна с икосаэдром.

Задачка 2.10. Воспользуемся обозначениями и предположениями задачки 2.9. Покажите, что никакие три точки из Σ (единственная G-орбита в $\mathbb{P}^2$, состоящая из шести точек) не лежат на одной прямой в $\mathbb{P}^2$, а Σ не содержится ни в какой конике на $\mathbb{P}^2$ (целиком). Пусть $\pi\colon S \to \mathbb{P}^2$ композиция раздутия всех точек из Σ. Воспользуйтесь следующим фактом: поверхность S измоморфна неособой кубической поверхности в $\mathbb{P}^3$, а действие группы G на $\mathbb{P}^2$ поднимается на поверхность S. Покажите, что $\mathrm{Aut}(S) \cong \mathbb{S}_5$ (воспользуйтесь следующим фактом: если неособая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$ допускает точное действие группы $\mathbb{A}_5$, то эта поверхность изоморфна поверхности $\sum_{i=0}^{4} x_i^3 = \sum_{i=0}^{4} x_i = 0$ в $\mathbb{P}^4$. Покажите, что два несопряженных в $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2)$ действия $\mathbb{A}_5$ на $\mathbb{P}^2$ сопряжены (как действия) в $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ (используйте тот факт, что внешние автоморфизмы группы $\mathbb{A}_5$ являются внутренними для группы $\mathbb{S}_5$).

Задачка 2.11. Воспользуемся обозначениями и предположениями задачки 2.10. Пусть θ — некоторая нечетная инволюция в группе $\mathrm{Aut}(S) \cong \mathbb{S}_5$. Обозначим π-исключительные кривые символами $E_1, \ldots, E_6$. Положим $E = \sum_{i=1}^{6} E_i$ и $H = \pi^*(L)$, где L — прямая на $\mathbb{P}^2$. Покажите, что

$$\begin{cases} \theta^*\big(H\big) \sim 5H - 2E, \\ \theta^*\big(E\big) \sim 12H - 5E, \end{cases}$$

воспользовавшись тем фактом что инволюция θ нетривиально действует на группе $\mathrm{Pic}(S)$ (подумайте почему это так). Положим $\tau = \pi \circ \theta \circ \pi^{-1} \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$. Пусть $\mathcal{H}$ — линейная система всех прямых на $\mathbb{P}^2$, и пусть $\mathcal{M}$ — её собственный прообраз на $\mathbb{P}^2$ при отображении θ. Покажите, что общая кривая в $\mathcal{M}$ является кривой степени 5, которая особа в каждой точке множества Σ.

Задачка 2.12. Пусть C — неособая кривая. Положим $S = C \times \mathbb{P}^1$, пусть $\phi\colon S \to C$ — естественная проекция. Пусть P — некоторая точка на S. Обозначим символом L слой ϕ, который проходит через точку P. Пусть $\pi\colon \tilde{S} \to S$ — раздутие точки P. Обозначим символом $\tilde{L}$ собственный прообраз кривой L на поверхности S. Воспользуйтесь критерием стягиваемости, для того, чтобы показать что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \tilde{S} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi'"] & \\ S \arrow[dr, "\phi"'] & & S' \arrow[dl, "\phi'"] \\ & \mathbb{P}^1 & \end{tikzcd},$$

такая что π' — стягивание кривой $\tilde{L}$, а ϕ' — морфизм все слои которого изофорфны $\mathbb{P}^1$.

Задачка 2.13. Воспользуемся обозначениями и предположениями задачки 2.12. Предположим, что $C = \mathbb{P}^1$. Положим $\mathbb{F}_1 = S'$, $\phi_1 = \phi'$ и $\psi_1 = \pi' \circ \pi^{-1} \colon S \to S'$. Покажите, что на $\mathbb{F}_1$ существует ровно одна неприводимая кривая с отрицательным самопересечением и покажите, что это самопересечение равно -1, а кривая является сечением расслоение ϕ_1 (то есть пересекает каждый слой по 1). Покажите, что $\mathbb{F}_1$ изоморфна раздутию $\mathbb{P}^2$ в точке.

Задачка 2.14. Воспользуемся обозначениями и предположениями задачки 2.13. Пусть E_1 — неприводимая кривая на $\mathbb{F}_1$ такая что $E_1 \cdot E_1 = -1$. По аналогии с задачкой 2.12 постройте цепочку бирациональных преобразование

$$\mathbb{F}_1 \xrightarrow{\psi_2} \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\psi_3} \mathbb{F}_3 \xrightarrow{\psi_4} \cdots,$$

таких что $\mathbb{F}_n$ — неособая поверхность, такая что существует сюрьективный морфизм $\phi_n \colon \mathbb{F}_n \to \mathbb{P}^1$ все слои которого изофорны $\mathbb{P}^1$ и на $\mathbb{F}_n$ существует неприводимая кривая E_n, такая что E_n — сечение расслоения ϕ_n и $E_n \cdot E_n = -n$. Покажите, что на $\mathbb{F}_n$ нет других неприводимых кривых с отрицательным самопересечением. Положите $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и $\phi_0 = \phi$. Объясните как охарактеризовать $\mathbb{F}_n$ в терминах существования морфизма ϕ_n и кривой E_n.

Задачка 2.15. Воспользуемся обозначениями и предположениями задачки 2.14. Положим $V_n = \mathrm{Pic}(\mathbb{F}_n) \otimes \mathbb{R}$. Покажите, что $V_n \cong \mathbb{R}^2$. Пусть $\mathrm{NE}(\mathbb{F}_n)$ и $\mathrm{Eff}(\mathbb{F}_n)$ — конусы в V_n порожденный классами численно эффективных (дивизор называется численно эффективным если он пересекает каждую кривую неотрицательно) и эффективных дивизоров, соответственно. Пусть L_n — слой расслоения ϕ_n. Убедите себя что $\mathrm{NE}(\mathbb{F}_n)$ и $\mathrm{Eff}(\mathbb{F}_n)$ действительно конусы. Покажите, что конус $\mathrm{Eff}(\mathbb{F}_n)$ порожден L_n и E_n, а конус $\mathrm{NE}(\mathbb{F}_n)$ порожден L_n и $E_n + nL_n$. В частности, конусы $\mathrm{NE}(\mathbb{F}_n)$ и $\mathrm{Eff}(\mathbb{F}_n)$ замкнуты в V_n.

Задачка 2.16. Пусть S — неособая поверхность, а C — неособая кривая на ней. Покажите, что если $-K_S \cdot C < 0$ и $C^2 < 0$, то $C \cong \mathbb{P}^1$ и $C^2 = -1$. Покажите, что если $-K_S \cdot C < 0$ и $C^2 = 0$, то $C \cong \mathbb{P}^1$.

Задачка 2.17. Воспользуйтесь тем фактом, что раздутиями поверхности в точках можно разрешить особенности любой неприводимой кривой на поверхности, для обобщение утверждений задачки 2.16 на случай особых кривых.

3. Четверг, 18 августа

Пусть S — неособая поверхность, а D — $\mathbb{Q}$-дивизор, то есть формальная линейная комбинация $\sum_{i=1}^{r} a_i C_i$, где $a_1, a_2, \ldots, a_r$ — рациональные числа, а $C_1, \ldots, C_r$ — неприводимые кривые. Как обычно, мы называем дивизор D эффективным если все числа $a_1, a_2, \ldots, a_r$ положительны. Очевидно, что $\mathbb{Q}$-дивизоры на S образуют абелеву группу по сложению.

Задачка 3.1. Два $\mathbb{Q}$-дивизора D и D' на поверхности S называются $\mathbb{Q}$-рационально эквивалентными (обозначается как $D \sim_{\mathbb{Q}} D'$), если существует ненулевое целое число m, такое что mD и mD' обычные дивизора (мы убили все знаменатели) и $mD \sim mD'$. Покажите что фактор группы $\mathbb{Q}$-дивизоров на поверхности S по $\mathbb{Q}$-рациональной эквивалентности можно отождествить с группой $\mathrm{Pic}(S) \otimes \mathbb{Q}$. Определите кратности в точках и локальные кратности пересечений $\mathbb{Q}$-дивизоров на поверхности S, используя эти понятия для (скажем неприводимых) кривых. Определите форму пересечения $\mathbb{Q}$-дивизоров на поверхности S. Проверьте что эта форма пересечения "уважает" $\mathbb{Q}$-рациональную эквивалентность и "опускается" на $\mathrm{Pic}(S) \otimes \mathbb{Q}$ (воспользуйтесь аналогичными утверждениями (теоремой Безу на поверхности S) для обычных дивизоров.

Предположим, что D эффективен. В этом случае пару (S, D) принято называть лог-парой, а D принято называть границей (в некоторых источниках под границей подразумевается что все числа $a_1, a_2, \ldots, a_r$ строго меньше 1, но мы этого делать не будем).

Задачка 3.2. Пусть $S = \mathbb{P}^2$. Обозначим буквой L класс прямой в $\mathrm{Pic}(S) \otimes \mathbb{Q}$. Тогда $D \sim_{\mathbb{Q}} \mu L$ для некоторого положительного рационального числа μ. Пусть P – некоторая точка на S. Покажите, что $\mathrm{mult}_P(D) \leqslant \mu$. Что можно сказать о $\mathbb{Q}$-дивизоре D если $\mathrm{mult}_P(D) = \mu$?

Пусть $f \colon \tilde{S} \to S$ — произвольный бирациональный морфизм (как мы знаем это просто композиция раздутий), а $E_1, \ldots, E_n$ — f-исключительные кривые (неприводимые). Обозначим символами $\tilde{C}_1, \ldots, \tilde{C}_r$ собственные прообразы кривых $C_1, \ldots, C_r$ на поверхности S, соответственно. Положим $\tilde{D} = \sum_{i=1}^{r} a_i \tilde{C}_i$ (то есть $\tilde{D}$ — собственный прообраз $\mathbb{Q}$-дивизора D на поверхности $\tilde{S}$).

Задачка 3.3. Определите $f^*(D) \in \mathrm{Pic}(\tilde{S}) \otimes \mathbb{Q}$. Покажите что

$$\tilde{D} \sim_{\mathbb{Q}} f^*(D) - \sum_{i=1}^{n} c_i E_i$$

для некоторых неотрицательных рациональных чисел $c_1, \ldots, c_n$. Покажите, что

$$K_{\tilde{S}} \sim f^*(K_S) + \sum_{i=1}^{n} b_i E_i$$

для некоторых положительных целых чисел $b_1, \ldots, b_n$. Покажите, что числа $c_1, \ldots, c_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ однозначно определены. Воспользуйтесь тем что форма пересечения f-исключительных кривых отрицательно определена (а заодно попробуйте доказать это).

Мы скажем, что f — лог-разрешение лог-пары (S, D) если все кривые среди $\tilde{C}_1, \ldots, \tilde{C}_r, E_1, \ldots, E_n$ неособы, любые две кривые среди $\tilde{C}_1, \ldots, \tilde{C}_r, E_1, \ldots, E_n$ пересекаются трансверсально (так же как кривые $x = 0$ и $y = 0$ на $\mathbb{C}^2$), и никакие три кривые среди $\tilde{C}_1, \ldots, \tilde{C}_r, E_1, \ldots, E_n$ пересекаются в одной точке (если эти три условия выполнены, то говорят, что дивизор $\sum_{i=1}^{r} \tilde{C}_i + \sum_{i=1}^{n} E_i$ является дивизором с простыми нормальными пересечениями).

Задачка 3.4. Покажите что лог-разрешение лог-пары (S, D) существует.

Для каждой f-исключительной кривой E_k определим рациональное число $a(S,D,E_k)$ (обычно называемое дискрепантой лог-пары (S,D) в дивизоре E_k) посредством рациональной эквивалентности.

$$K_{\tilde{S}}+\tilde{D}\sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_S+D)+\sum_{i=1}^{n} a(S,D,E_i)E_i.$$

Задачка 3.5. Покажите, что числа $a(S,D,E_1),\ldots,a(S,D,E_n)$ корректно и однозначно определены. Выразите эти числа через числа $c_1,\ldots,c_n$ и $b_1,\ldots,b_n$ из задачке 3.3.

Мы скажем, что особенности лог-пары каноничны (терминальны, соответсвенно) если все числа $a(S,D,E_1),\ldots,a(S,D,E_n)$ неотрицательны (положительны, соответственно) для любого выбора бирационального морфизма $f\colon\tilde{S}\to S$. Если $a(S,D,E_k)<0$ ($a(S,D,E_k)\leqslant 0$, соответсвенно), то мы назовем точку $f(E_k)$ центром неканонических особенностей (нетерминальных особенностей, соответственно).

Задачка 3.6. Покажите, что каноничность лог-пары (S,D) эквивалентна тому что выполнено неравенство $\mathrm{mult}_P(D)\leqslant 1$ для любой точки $P\in S$. Найдите аналогичный критерий для терминальности лог-пары (S,D).

Мы скажем, что особенности лог-пары лог-каноничны (лог-терминальны, соответсвенно) если все числа $a(S,D,E_1),\ldots,a(S,D,E_n),-a_1,-a_2,\ldots,-a_r$ не меньше чем -1 (строго больше чем -1, соответственно) для любого выбора бирационального морфизма $f\colon\tilde{S}\to S$. Если $a(S,D,E_k)<-1$ ($a(S,D,E_k)\leqslant -1$, соответсвенно), то мы назовем точку $f(E_k)$ центром не-лог-канонических особенностей (лог-канонических, соответственно).

Задачка 3.7. Покажите что условие каноничности, терминальности, лог-каноничности, лог-терминальности лог-пары (S,D) достаточно проверить только для какого-то одного лог-разрешения лог-пары (S,D) (вместо всех возможных бирациональных морфизмов $f\colon\tilde{S}\to S$).

Заметим, что в нашу лог-терминальность принято также называть лог-терминальностью по Кавамате, но мы этого делать не будем. Иногда, центры лог-канонических особенностей называют также центрами не-лог-терминальных особенностей (что логично, но к сожалению не общепринято). Теоретико-множественное объединение всех центров лог-канонических особенностей лог-пары (S,D) известно как локус (место) лог-канонических особенностей (S,D) и обозначается символом $\mathrm{LCS}(S,D)$. Локус $\mathrm{LCS}(S,D)$ играет важную роль в геометрии.

Задачка 3.8. Покажите, что лог-каноничность лог-пары (S,D) следует из того, что $\mathrm{mult}_P(D)\leqslant 1$ для всех точек $P\in S$. Покажите, что если $\mathrm{mult}_P(D)>2$, то точка P является центром не-лог-канонических особенностей, а лог-пара (S,D) не лог-канонична в P. Найдите аналогичные условия для лог-терминальности лог-пары (S,D).

Задачка 3.9. Пусть $S=\mathbb{P}^2$ и $r=1$, а кривая C_1 задана уравнением $zx^2=y^3$. Найдите (постройте) лог-разрешение для лог-пары (S,D). Посчитайте все числа $c_1,\ldots,c_r$. Покажите что (S,D) лог-канонична если и только если $a_1\leqslant 5/6$. Определите условия при каких лог-пара (S,D) лог-терминальна. Обратите внимание, что $5/6=1/2+1/3$. Решите аналогичную задачу в случае когда C_1 задана уравнением $zx^2=y^5$ или/и $zx^5=y^7$. Угадайте ответ в случае когда C_1 задана уравнением $zx^n=y^m$ (даже если C_1 приводима).

Задачка 3.10. Пусть $a_1 \leqslant 1$, а кривая C_1 неособа в некоторой точке $P \in C_1$. Предположим, что (S,D) не является лог-канонической в точке P. Покажите, что

$$\mathrm{mult}_P\left(C_1 \cdot \Big(\sum_{i=2}^{r} a_i C_i\Big)\right) > 1,$$

где (как легко видеть) $r \geqslant 2$, поскольку C_1 неособа в P, а (S,D) не лог-канонична в точке P. Воспользуйтесь индукцией по n (число раздутий) и неравенством задачки 2.3.

Задачка 3.11. Предположим, что $r \geqslant 3$. Предположим, что кривые C_1 и C_2 неособы в некоторой точке $P \in C_1 \cap C_2$ и пересекаются в ней трансверсально (то есть $\mathrm{mult}_P(C_1 \cdot C_2) = 1$). Предположим, что лог-пара (S,D) не лог-канонична в точке P, а также предположим, что выполнено неравенство $a_1 + a_2/2 \leqslant 1$ (напомним, что все числа $a_1, a_2, \ldots, a_r$ считаются неотрицательными). Попробуйте показать, что

$$\mathrm{mult}_P\left(C_1 \cdot \Big(\sum_{i=3}^{r} a_i C_i\Big)\right) > 2a_1 - a_2 \text{ или } \mathrm{mult}_P\Big(C_2 \cdot \Big(\sum_{i=3}^{r} a_i C_i\Big)\Big) > \frac{3}{2}a_2 - a_1,$$

но не расстраивайтесь если не получится (я не знаю простого решения, но уверен что оно есть).

Пусть $\mathcal{M}$ — линейная системы на S, которая не имеет неподвижных кривых. Возьмем произвольное положительное рациональное число λ. Тогда пару $(S, \lambda\mathcal{M})$ принято называть подвижной лог-парой. Можно также рассмотреть пару смешанного типа $(S, D + \lambda\mathcal{M})$.

Задачка 3.12. Определите для пары $(S, D+\lambda\mathcal{M})$ все понятия что мы определили для (S,D).

Заметим, что вместо $\lambda\mathcal{M}$ можно рассматривать линейную комбинацию линейных систем без неподвижных кривых, но как правило для всех известных применений достаточно рассмотривать всего одну линейную систему.

Задачка 3.13. Предположим, что $r = 2$, особенности логпары $(S, \lambda\mathcal{M} + a_1C_1 + a_2C_2)$ не являются лог-терминальными в некоторой точке $P \in C_1 \cap C_2$. Пусть M_1 и M_2 — достаточно общие кривые в линейной системе $\mathcal{M}$. Предположим, что кривые C_1 и C_2 неособы в точке P и пересекаются в ней трансверсально (то есть $\mathrm{mult}_P(C_1 \cdot C_2) = 1$). Допустим (только в этой задаче) что числа a_1 и a_2 могут быть любыми рациональными числами (не обязательно неотрицательными). Покажите, что имеет место неравенство

$$\mathrm{mult}_P\Big(M_1 \cdot M_2\Big) \geqslant \begin{cases} \dfrac{4\big(1-a_1\big)\big(1-a_2\big)}{\lambda^2} & \text{если } a_1 \geqslant 0 \text{ или } a_2 \geqslant 0, \\ \dfrac{4\big(1-a_1-a_2\big)}{\lambda^2} & \text{если } a_1 \leqslant 0 \text{ и } a_2 \leqslant 0, \end{cases}$$

воспользовавшись индукцией по n (число необходимых раздутий для получения дискрепанты $\leqslant -1$) и неравенством задачки 2.3.

Задачка 3.14. Предположим, что особенности логпары $(S, \lambda\mathcal{M})$ не являются лог-терминальными в некоторой точке $P \in C_1 \cap C_2$. Предположим, что кривые C_1 и C_2 неособы в точке P и пересекаются в ней трансверсально. Выведите из задачки 3.13 неравенство

$$\mathrm{mult}_P\Big(M_1 \cdot M_2\Big) \geqslant \frac{4}{\lambda^2}$$

и попробуйте его доказать без использования задачки 3.13 (такое решение существует (но его мало кто проверял, может оно и не верное), но оно довольно длинное, хотя и простое).

Пусть G — конечная группа, которая точно действует на S. Предположим, что линейная система $\mathcal{M}$ является G-инвариантной.

Задачка 3.15. Предположим, что $S = \mathbb{P}^2$. Тогда $\mathcal{M} \sim_{\mathbb{Q}} \mu(-K_S)$ для некоторого положительного рационального числа μ. Покажите, что если $\lambda \leqslant 1/\mu$, а лог-пара $(S, \lambda\mathcal{M})$ не является каноничной, то существует G-орбита на $\mathbb{P}^2$, состоящая не более чем из 8 точек. Воспользуйтесь задачкой 3.6.

Задачка 3.16. Предположим, что $S = \mathbb{P}^2$ и $G \cong \mathbb{A}_6$. Покажите, что каждое G-эквивариантное бирациональное отображение $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ является бирегулярным. Воспользуйтесь задачками 2.8 и 3.15.

Задачка 3.17. Предположим, что $S = \mathbb{P}^2$ и $G \cong \mathbb{A}_5$. Покажите, что группа G-эквивариантных бирациональных отображений $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ изоморфна группе $\mathbb{S}_5$. Покажите, что не существует G-эквивариантного бирационального отображения $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Воспользуйтесь задачками 2.9, 2.10, 2.11 и 3.15.

Задачка 3.18. Пусть S — неособая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$, определенная над полем $\mathbb{Q}$. Предположим, что S содержит две неприводимые рациональные (над $\mathbb{Q}$) кривые C_1 и C_2, также определенная над полем $\mathbb{Q}$, которые не лежат в одной плоскости. Покажите что S унирациональна над $\mathbb{Q}$. Постройте рациональное отображение $C_1 \times C_2 \dashrightarrow S$ проводя прямые через точки C_1 и C_2 (и пересекая их с S). Попробуйте показать, что построенное отображение доминантно.

Задачка 3.19. Пусть S — неособая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$, определенная над полем $\mathbb{Q}$. Предположим, что S содержит точку P которая также определена над $\mathbb{Q}$. Попробуйте показать, что S содержит две неприводимые рациональные (над $\mathbb{Q}$) кривые C_1 и C_2, также определенная над полем $\mathbb{Q}$, которые не лежат в одной плоскости. Если не получится погуглите “unirationality of cubic surfaces” или что то похожее.